

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

DIPLÔME DE DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

par

JABER Abdelouhab

**DIFFÉRENTS TYPES DE SCHÉMAS NUMÉRIQUES
POUR L'EQUATION DE TRANSPORT
EN GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE MONODIMENSIONNELLE**

Soutenue le 15 Juillet 1981 devant la Commission d'Examen :

M. J.C. MIELLOU

Président

MM. J-L. GOUT
P. LESAIN
J.F. MAITRE

}
Examineurs

L. Diss. Besançon





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546618_0003

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

DIPLÔME DE DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

par

JABER Abdelouhab

**DIFFÉRENTS TYPES DE SCHÉMAS NUMÉRIQUES
POUR L'EQUATION DE TRANSPORT
EN GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE MONODIMENSIONNELLE**

Soutenue le 15 Juillet 1981 devant la Commission d'Examen :

M. J.C. MIELLOU

Président

MM. J.-L. GOUT
P. LESAIN
J.F. MAITRE

}
Examineurs

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ BESANÇON

Président : Monsieur le Professeur Jacques ROBERT

FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN

M. le Professeur Jean BULABOIS
Physique Générale-optique

ASSESEURS

M. le Professeur Bernard MILLET
Botanique
M. Robert GUYETANT, Maître-Assistant
Biol. animale Ecologie

PRÉSIDENTS HONORAIRES

MM. THIEBAUT, LÉVÊQUE

DOYENS HONORAIRES

MM. GLANGEAUD, JACQUEMAIN, CHATELET, THIEBAUT, BERNARD

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. BENNETON, CHATELET, MESNAGE, QUANTIN, THEOBALD N., THIRY,
TRILLAT, TRONCHET, UEBERSFELD

MM. BANTEGNIE Robert	: Mathématiques
BENILAN Philippe	: Mathématiques
BERNARD Jean	: Chimie Physique
BIDAULT Michel	: Taxonomie expérimentale
BROQUET Paul	: Géologie
BRUCKERT Sylvain	: Ecologie végétale
BULABOIS Jean	: Physique Gle optique
CAPODANNO Pierre	: Mécanique théorique
CERUTTI Ernest	: Chimie appliquée
CHALEAT Raymond	: Mécanique appliquée
CHARDON J-Claude	: Spectroscopie
CHAUVE Pierre	: Géologie minéralogie
COUGNARD Jean	: Mathématiques
DEVIN Claude	: Chimie 1er cycle
DOBREMEZ Jean-Fr.	: Biologie
DUBOUCHET Jacques	: Physiologie végétale
GALATRY Louis	: Physique moléculaire
GAUDEMER Yves	: Biochimie
GIRARDET Claude	: Physique Moléculaire
GOMOT Lucien	: Zoologie-Embryologie
GOUARNE René	: Mathématiques
GRAS Georges	: Mathématiques
GREMILLARD Jean	: Mathématiques
KARCHE J-Paul	: Pétrographie Minéralogie
LALLEMENT Gérard	: Mécanique appliquée
LAUDE Bernard	: Chimie organique
LESAINT Pierre	: Mathématiques I

LHOTE François	: Automatique
MERIGOUX Henri	: Cristallographie et Synthèses minérales
MIELLOU J-Claude	: Analyse numérique
MILLET Bernard	: Botanique
MONTAGNER Hubert	: Psychophysologie
MOREELS Guy	: Astronomie
OLIVIER Marchel	: Electroniq. quantique
OYTANA Claude	: Mécanique appliquée
PAGETTI Jacques	: Corrosion et traitements de surface
PARIZET Jean	: Mathématiques
PLUVINAGE Philippe	: Physique théorique
POTIER Robert	: Physique des solides
RANGHEARD Yves	: Géologie
RIPPLINGER Jean	: Physiologie animale
ROBERT Daniel	: Physique
ROBERT Guy	: Electrochimie
ROBERT Jacques	: Mathématiques I
THEOBALD J-Gérard	: Spectroscopie hertzienne
THIEBAUT Jean	: Pétrogr. minéralogie
TREHEL Michel	: Informatique
VERNEAUX Jean	: Zoologie-Embryologie
VIENOT Jean-Charles	: Physique Gle optique
WEIL Michel	: Mathématiques

Responsable des services administratifs :

M. Jean-Marie RUNGE

Professeurs des Instituts Universitaires de Technologie dont les activités de Recherche sont rattachées à la Faculté des Sciences et des Techniques de Besançon

I.U.T. de BESANÇON

MM. GENTYL Claude	Spécialité : Physique
MARTINET André	Spécialité : Chimie
SONZOGNO Robert	Spécialité : Mécanique

I.U.T. de BELFORT

MM. KAUFFMANN J-Marie	Spécialité : Electrotechnique
MANDRET Gérard	Spécialité : Electronique
OIKNINE Claude	Spécialité : Mécanique
PRENEL Jean-Pierre	Spécialité : Physique
STAMON Georges	Spécialité : Informatique

Je tiens particulièrement à remercier :

Monsieur J. C. Miellou, Professeur à l'Université de Besançon, pour l'honneur qu'il me fait de bien vouloir présider ce jury de thèse.

Monsieur P. Lesaint, Professeur à l'Université de Besançon, qui est à l'origine de cette thèse. Je veux aussi lui exprimer ma plus sincère gratitude, pour la confiance qu'il m'a toujours témoignée, pour sa disponibilité à mon égard, pour ses nombreux conseils et encouragements sans lesquels ce travail n'aurait pas été possible.

Monsieur J. F. Maitre, Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon, qui a manifesté son intérêt pour ce travail et a accepté de le juger.

Monsieur J. L. Gout, Docteur ès Sciences à l'Université de Pau, qui a bien voulu accepter de faire partie du jury.

Mademoiselle C. Pagani qui, avec compétence, soin, rapidité et bonne humeur, a assuré la dactylographie de cette thèse, ainsi que tout le personnel du service de reproduction.

INTRODUCTION

Un des problèmes principaux liés à l'équation de transport est le calcul du coefficient d'amplification K défini dans le cas monocinétique comme la plus grande valeur propre du problème :

$$S \psi = \lambda H \psi$$

où H est un opérateur hyperbolique du premier ordre et S un opérateur intégral.

Une méthode de la puissance est utilisée fréquemment en pratique pour trouver cette valeur propre : ψ^0 arbitraire

$$H \psi^{(n+1)} = S \psi^{(n)}$$

et

$$\frac{\langle S \psi^{(n+1)} \rangle}{\langle S \psi^{(n)} \rangle} \quad \text{converge vers } K \text{ lors que } n \rightarrow \infty.$$

$\langle \rangle$ symbolise l'intégration en espace et direction.

On est donc amené à résoudre à chaque itération un problème du type $H \varphi = \text{second membre donné}$.

Dans ce travail, on s'intéresse à la résolution de ce problème dans le cas d'une géométrie monodimensionnelle sphérique, caractérisé par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} H \varphi = \mu \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varphi) + r \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) \varphi] + \sigma r^2 \varphi = r^2 S, \\ \text{pour } (r, \mu) \in \Omega =]0, R[\times]-1, +1[\\ \varphi(R, \mu) = 0, \quad \text{pour } \mu < 0. \end{array} \right.$$

La fonction $\varphi(r, \mu)$ représente un flux de neutrons situés à la distance r de l'origine et ayant une vitesse $\vec{v}$ telle que $\vec{r} \cdot \vec{v} = r |\vec{v}| \mu$, où $\vec{r}$ désigne le rayon vecteur. La quantité σ représente une section efficace et la fonction S prend

en compte les termes de fission et les sources. La condition aux limites signifie qu'aucun neutron ne pénètre dans la sphère de rayon R .

Une propriété importante physiquement est que le flux à l'origine $r = 0$ ne doit pas dépendre de la variable angulaire μ ($\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(0, \mu) = 0$).

Il a été remarqué [11] que l'approximation spatiale n'est pas suffisamment précise, cette propriété est très mal vérifiée numériquement.

Le but de ce travail est de décrire et étudier mathématiquement et numériquement de nouveaux schémas possédant de bonnes propriétés de précision en la variable spatiale.

Pour cela, on décompose le rectangle $[0, R] \times [-1, +1]$ en rectangles $K_{ij} = [r_i, r_{i+1}] \times [\mu_j, \mu_{j+1}]$ et on définit des méthodes d'éléments finis continus utilisant des polynômes de degré 1 en μ et 2 en r sur chaque élément.

Au chapitre I, on étudie différentes discrétisations de l'équation particulière (pour $\mu = -1$) :

$$-\frac{\partial u}{\partial r} + \sigma u = S, \quad \text{pour } r \in]0, R[$$

$$u(R) = 0.$$

Au chapitre II, on décrit les schémas numériques et on étudie leur stabilité.

Au chapitre III, on montre des théorèmes de majorations d'erreur et on donne des résultats numériques pour différents seconds membres S .

On constate, en particulier, que pour les schémas définis au chapitre II,

l'analogue discret de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(0, \mu) \right)^2 d\mu$ est très voisin de zéro.

TABLE DES MATIERES

=====

	pages
CHAPITRE 0 - Position du problème et généralités	4
CHAPITRE I - Approximation de l'équation particulière.....	8
1. Définition des schémas numériques	9
1.1 et 1.2	
2. Stabilité et convergence des schémas	
1.1 et 1.2	23
3. Résultats numériques.....	41
CHAPITRE II - Description des schémas numériques	
et stabilité	47
1. Ecriture des schémas numériques	
et propriétés de conservation	48
2. Etude de la stabilité.....	64
CHAPITRE III - Convergence des schémas	
et résultats numériques.....	79
1. Majorations d'erreur	80
2. Résultats numériques.....	93

CHAPITRE 0

=====

POSITION DU PROBLEME ET GENERALITES

=====

Ce chapitre rappelle un certain nombre de propriétés (classiques) de la partie hyperbolique de l'équation de transport en géométrie sphérique (r, μ) . Pour plus de détails, on renvoie à Lathrop - Carlson [7]. Ces propriétés seront utiles par la suite pour la définition des schémas numériques.

Nous nous proposons de résoudre numériquement l'équation de transport dans un cadre de géométrie sphérique à une dimension qui s'écrit sous la forme du problème du premier ordre suivant ([1], [6], [7], [13])

$$(0.1) \quad Au = \mu \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) + r \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u] + \sigma r^2 u = r^2 S,$$

$$\text{pour } (r, \mu) \in \Omega =]0, R[\times]-1, +1[$$

$$(0.2) \quad u(R, \mu) = 0, \quad \text{pour } \mu < 0.$$

$u(r, \mu)$ désigne un flux de neutrons situés à la distance r de l'origine et ayant une vitesse $\vec{v}$ telle que $\vec{r} \cdot \vec{v} = r |v| \mu$, ou $\vec{r}$ est le rayon vecteur. La quantité σ représente une section efficace et le terme S prend en compte le scattering, la fission et les sources.

La condition aux limites (0.2) signifie qu'aucun neutron ne pénètre dans la sphère de rayon R .

Une autre forme d'écriture de l'équation (0.1) (forme non conservatrice) est la suivante :

$$(0.3) \quad Au = \mu r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + r (1 - \mu^2) \frac{\partial u}{\partial \mu} + \sigma r^2 u = r^2 S.$$



L'équation (0.3) peut être considérée comme un "système" symétrique de Freidrichs [4], et dans ce cas B est donné par :

$$(0.4) \quad B = \mu r^2 n r + r (1 - \mu^2) n \mu.$$

En utilisant le lemme 1.1.4 (voir [10]), on montre que les conditions aux limites (0.2), sont les seules conditions admissibles et qu'il n'y a pas d'autres conditions aux limites à imposer.

On va donner trois remarques qui vont être très importantes pour la résolution numérique du problème (0.1), (0.2).

Remarque 0.1 : On définit les quantités (moments) :

$$m_\ell = \int_{-1}^{+1} \mu^\ell u(r, \mu) d\mu \quad \text{pour } \ell = 0, 1, 2, \dots$$

Une intégration formelle de l'équation (0.1) par rapport à la variable μ donne :

$$(0.5) \quad \frac{\partial}{\partial r} (r^2 m_1) + \sigma r^2 m_0 = r^2 \int_{-1}^{+1} S d\mu.$$

Cette relation constitue une première propriété de conservation (propriété de conservation 1) ; elle montre que le mécanisme de transfert directionnel exprimé par le terme $\frac{\partial}{\partial \mu} (r (1 - \mu^2) u)$ n'a pas d'influence sur le nombre total de particules.

Remarque 0.2 : En intégrant la relation (0.5) par rapport à r dans un intervalle $[a, b]$, on obtient :

$$b^2 m_1(b) - a^2 m_1(a) + \int_a^b \sigma r^2 m_0(\Omega) dr = \int_a^b \int_{-1}^{+1} r^2 S dr d\mu.$$

Cette relation traduit une deuxième propriété de conservation (propriété de conservation 2) qui est :

$$\text{Flux sortant} + \text{Captures} = \text{Flux entrant} + \text{Sources}.$$

Remarque 0.3 : Les caractéristiques de l'équation (0.3) divisée par r^2 sont définies par l'équation $\frac{dr}{\mu} = \frac{r d\mu}{1 - \mu^2}$.

Ce sont les courbes d'équations :

$$(0.6) \quad r^2 (1 - \mu^2) = \text{cste} \quad (\text{figure 0.1}).$$

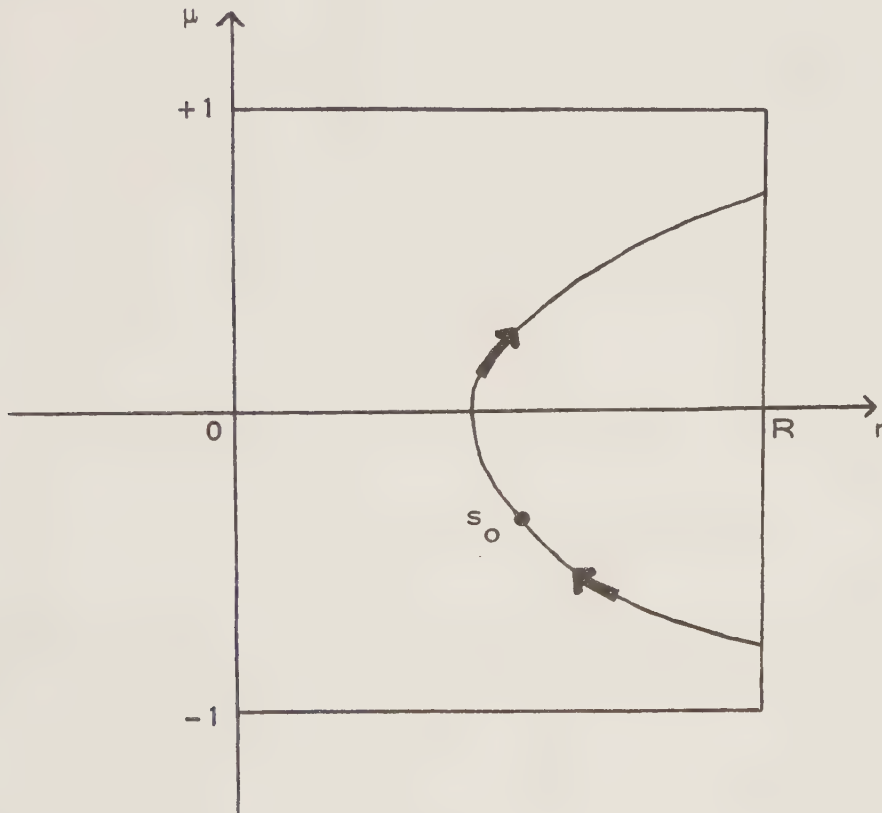
L'équation (0.3) s'écrit alors :

$$(0.7) \quad \frac{du}{ds} + \sigma u = S$$

$$(0.8) \quad u(0) = 0$$

avec $\frac{d}{ds}$ la dérivée le long de ces courbes caractéristiques (0.6).

On remarque que le flux u en un point s_0 d'une caractéristique ne dépend que des valeurs de u aux points de cette caractéristique situés en amont de s_0 (propriété de conservation 3). Cette propriété sera très utile dans la définition du cheminement sur le maillage.



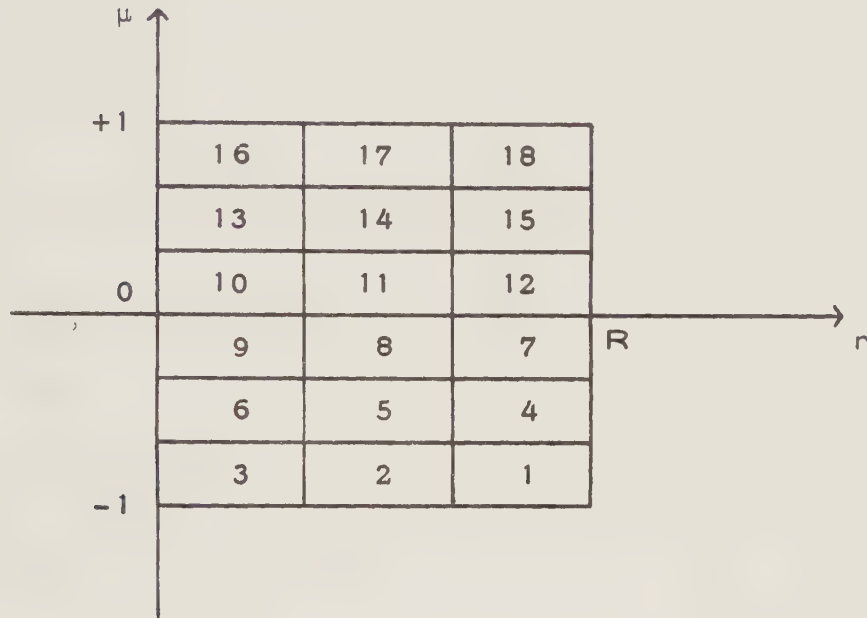
(figure 0.1)

Ces trois remarques vont jouer un rôle essentiel dans l'approximation du problème (0.1), (0.2) ; en effet, les schémas numériques qu'on va définir par la suite au moyen de méthodes d'éléments finis continues $([8], [9], [5])$ devront satisfaire de façon discrète les propriétés de conservation 1 et 2,

et devront permettre une résolution numérique maille par maille en suivant les directions caractéristiques (propriété 3), c'est-à-dire en suivant le déplacement des neutrons.

En considérant un découpage du domaine $\bar{\Omega} = [0, R] \times [-1, +1]$ en rectangles $K_{ij} = [r_i, r_{i+1}] \times [\mu_j, \mu_{j+1}]$, $0 \leq i \leq I-1$, $-J \leq j \leq J-1$,

pour satisfaire de façon discrète la propriété 3, [7], on peut prendre pour exemple de cheminement sur le maillage celui donné par la figure (0.2)



(figure 0.2)

Exemple de cheminement

Remarque 0.4 : Puisqu'il s'agit d'une méthode continue, le calcul de la solution approchée, suivant le cheminement de la figure (0.2) nécessite la connaissance des valeurs du flux pour $\mu = -1$, $0 \leq r \leq R$ (ce qui fait l'objet du chapitre I) et pour $r = 0$, $\mu > 0$; pour ce dernier point, on utilisera une propriété de symétrie donnée par l'égalité suivante [7] :

$$u(0, \mu) = u(0, -\mu), \quad \text{pour } -1 \leq \mu \leq +1.$$

CHAPITRE I

=====

APPROXIMATION DE L'EQUATION PARTICULIERE

=====

Dans ce chapitre, on fait la résolution numérique de l'équation suivante :

$$-\frac{d\varphi}{dr} + \sigma \varphi = S, \quad \text{pour } r \in]0, R[$$

$$\varphi(R) = 0$$

qu'on appelle équation particulière, puisqu'elle permet la détermination du flux approché le long de l'axe des r , pour $0 \leq r \leq R$, et pour $\mu = -1$. Le plan de ce chapitre est le suivant :

- 1) On définit deux types de schémas numériques approchant le problème posé et dont la résolution permet d'avoir de proche en proche la solution discrète.
- 2) On étudie la stabilité et la convergence de ces deux schémas pour différentes normes avec poids analogues discrets de la norme :
$$\left(\int_0^R r^\gamma \varphi^2 dr \right)^{\frac{1}{2}}.$$
- 3) On résout numériquement ces deux schémas et on donne les résultats des essais numériques.

1.1 - Définition des schémas numériques 1.1 et 1.2

Dans ce paragraphe, on considère l'équation de transport en géométrie sphérique monodimensionnelle (r, μ) ([13], [6], [7]), écrite de façon formelle pour $\mu = -1$. Pour résoudre cette équation, on définit une méthode d'éléments finis continue [10], on suppose que la restriction du flux approché à chaque intervalle $[r_i, r_{i+1}]$ est un polynôme de P_2 .

On voudrait que les schémas numériques obtenus satisfassent de façon discrète la propriété de conservation 2. On pourra choisir entre une formule de quadrature sans poids et une formule de quadrature avec poids, ce qui va donner naissance à deux types de schémas.

On commencera d'abord par les écrire, puis on va analyser au sens des différences finies l'erreur de troncature, pour chaque type de schéma.

La stabilité et la convergence de ces schémas seront étudiées au paragraphe 2.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1.1) \quad -\frac{d\varphi}{dr} + \sigma \varphi = S, \quad \text{pour } r \in]0, R[$$

avec la condition aux limites

$$(1.2) \quad \varphi(R) = 0.$$

On découpe l'intervalle $[0, R]$ de la façon suivante :

$$(1.3) \quad 0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{I-1} < r_I = R.$$

Du fait que l'équation de transport a un caractère sphérique, on remarque que pour la suite, il est tout à fait naturel d'étudier l'équation (1.1) multipliée par r^2 .

Soit W_h l'espace des fonctions continues sur $[0, R]$ et dont la restriction à chaque intervalle $[r_i, r_{i+1}]$ est un polynôme de degré 2. Les fonctions w_h de W_h sont déterminées de façon unique par leurs valeurs $w_i, w_{i+\frac{1}{2}}, w_{i+1}$, aux points $r_i, r_{i+\frac{1}{2}}, r_{i+1}$, $0 \leq i \leq l-1$ avec $r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{r_{i+1} + r_i}{2}$.

On définit une solution $\varphi_h \in W_h$ approchant la solution φ du problème (1.1), (1.2) de la manière suivante :

Trouver $\varphi_h \in W_h$ tel que :

$$(1.4) \quad \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(-r^2 \frac{d\varphi_h}{dr} + \sigma r^2 \varphi_h - r^2 S \right) \psi_h dr = 0 \quad \forall \psi_h \in P_1, \quad l-1 \geq i \geq 0$$

$$(1.5) \quad \varphi_h(R) = \varphi_l = 0.$$

Pour calculer les intégrales intervenant dans les relations (1.4), on utilise la formule de quadrature approchée suivante :

$$(1.6) \quad \int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) dr \sim w_{i+\frac{1}{3}} f\left(r_{i+\frac{1}{3}}\right) + w_{i+\frac{2}{3}} f\left(r_{i+\frac{2}{3}}\right).$$

Les paramètres $w_{i+\frac{1}{3}}, r_{i+\frac{1}{3}}, w_{i+\frac{2}{3}}$ et $r_{i+\frac{2}{3}}$ sont choisis de telle sorte

que la propriété de conservation 2 soit satisfaite de façon discrète.

Un premier choix consiste à prendre :

$$(1.7) \quad r_{i+\frac{1}{3}} = \frac{(r_{i+1} + r_i)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}(r_{i+1} - r_i) \quad , \quad 0 \leq i \leq l-1$$

$$(1.8) \quad r_{i+\frac{2}{3}} = \frac{(r_{i+1} + r_i)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}(r_{i+1} - r_i) \quad , \quad 0 \leq i \leq l-1$$

$$(1.9) \quad w_{i+\frac{1}{3}} = w_{i+\frac{2}{3}} = \frac{(r_{i+1} - r_i)}{2} \quad , \quad 0 \leq i \leq l-1.$$

Dans ce cas, la formule de quadrature (1.6) est exacte sur chaque intervalle $[r_i, r_{i+1}]$, $0 \leq i \leq l-1$ pour les polynômes de P_3 , et on a la relation suivante :

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varphi) = w_{i+\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varphi) (r_{i+\frac{1}{3}}) + w_{i+\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varphi) (r_{i+\frac{2}{3}})$$

$$= r_{i+1}^2 \varphi_{i+1} - r_i^2 \varphi_i \quad \forall \varphi \in P_2.$$

Les équations (1.4) pour $\psi_h = 1$ s'écrivent :

$$(1.10) \quad r_i^2 \varphi_i - r_{i+1}^2 \varphi_{i+1} + 2w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}} \varphi_{i+\frac{1}{3}} + 2w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}} \varphi_{i+\frac{2}{3}}$$

$$+ w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^2 \left(\sigma \varphi_{i+\frac{1}{3}} - S_{i+\frac{1}{3}} \right)$$

$$+ w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^2 \left(\sigma \varphi_{i+\frac{2}{3}} - S_{i+\frac{2}{3}} \right) = 0$$

pour $l-1 \geq i \geq 0$

où :

$$\varphi_{i+\frac{1}{3}} = \varphi_h(r_{i+\frac{1}{3}}) = \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \varphi_i + \left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \varphi_{i+1} + \frac{2}{3} \varphi_{i+\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_{i+\frac{2}{3}} = \varphi_h(r_{i+\frac{2}{3}}) = \left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \varphi_i + \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \varphi_{i+1} + \frac{2}{3} \varphi_{i+\frac{1}{2}}$$

$$S_{i+\frac{1}{3}} = S(r_{i+\frac{1}{3}}, -1)$$

, $0 \leq i \leq l-1.$

$$S_{i+\frac{2}{3}} = S(r_{i+\frac{2}{3}}, -1)$$

Les relations (1.10) peuvent encore s'écrire :

$$(1.11) \quad \frac{(2r_i^2 + r_i r_{i+1})}{3} \varphi_i - \frac{(2r_{i+1}^2 + r_i r_{i+1})}{3} \varphi_{i+1} + \frac{2}{3} (r_{i+1}^2 - r_i^2) \varphi_{i+\frac{1}{2}}$$

$$+ \sigma (r_{i+1} - r_i) \left\{ \frac{(5r_i^2 - r_{i+1}^2 + 2r_i r_{i+1})}{36} \varphi_i \right.$$

$$+ \frac{(5r_{i+1}^2 - r_i^2 + 2r_i r_{i+1})}{36} \varphi_{i+1} + \frac{2}{9} (r_{i+1}^2 + r_i^2 + r_i r_{i+1}) \varphi_{i+\frac{1}{2}} \left\{ \right. \\ \left. - \frac{(r_{i+1} - r_i)}{2} \left\{ r_{i+\frac{1}{3}}^2 S_{i+\frac{1}{3}} + r_{i+\frac{2}{3}}^2 S_{i+\frac{2}{3}} \right\} \right\} = 0 \quad \text{pour} \quad i-1 \geq i \geq 0.$$

Considérons maintenant les relations (1.4) pour $\underline{\varphi_h = r}$:

$$(1.12) \quad \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(-r^3 \frac{d\varphi_h}{dr} + r^3 (\sigma \varphi_h - S) \right) dr = 0 \quad , \quad i-1 \geq i \geq 0.$$

Puisque φ_h est un polynôme de degré 2, le terme $-r^3 \frac{d\varphi_h}{dr}$ est un polynôme de degré 4, au lieu de l'approcher par la formule (1.6) qui n'est exacte que pour P_3 , on l'intègre de façon exacte.

On sait que :

$$(1.13) \quad \varphi_h(r) = \frac{2}{(r_{i+1} - r_i)^2} [(r - r_i)(r - r_{i+\frac{1}{2}}) \varphi_{i+1} \\ + (r - r_{i+1})(r - r_{i+\frac{1}{2}}) \varphi_i - 2(r - r_i)(r - r_{i+1}) \varphi_{i+\frac{1}{2}}].$$

En dérivant, on obtient :

$$(1.14) \quad \frac{d\varphi_h}{dr} = \frac{2}{(r_{i+1} - r_i)^2} [2r - (r_i + r_{i+\frac{1}{2}})] \varphi_{i+1} \\ + \frac{2}{(r_{i+1} - r_i)^2} [2r - (r_{i+1} + r_{i+\frac{1}{2}})] \varphi_i - \frac{4}{(r_{i+1} - r_i)^2} [2r - (r_{i+1} + r_i)] \varphi_{i+\frac{1}{2}}.$$

En intégrant, on obtient :

$$(1.15) \quad \int_{r_i}^{r_{i+1}} -r^3 \frac{d\varphi_h}{dr} dr = \frac{(-11r_{i+1}^3 - 7r_{i+1}^2 r_i - 3r_{i+1} r_i^2 + r_i^3)}{20} \varphi_{i+1} \\ + \frac{(-r_{i+1}^3 + 3r_{i+1}^2 r_i + 7r_{i+1} r_i^2 + 11r_i^3)}{20} \varphi_i \\ + \frac{(3r_{i+1}^3 + r_{i+1}^2 r_i - r_{i+1} r_i^2 - 3r_i^3)}{5} \varphi_{i+\frac{1}{2}}.$$

Grâce aux relations (1.15) et (1.6), les équations (1.12) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 (1.16) \quad & \frac{(-11r_{i+1}^3 - 7r_{i+1}^2 r_i - 3r_{i+1} r_i^2 + r_i^3)}{20} \varphi_{i+1} \\
 & + \frac{(-r_{i+1}^3 + 3r_{i+1}^2 r_i + 7r_{i+1} r_i^2 + 11r_i^3)}{20} \varphi_i \\
 & + \frac{(3r_{i+1}^3 + r_{i+1}^2 r_i - r_{i+1} r_i^2 - 3r_i^3)}{5} \varphi_{i+\frac{1}{2}} \\
 & + \sigma(r_{i+1} - r_i) \left[\frac{(-r_{i+1}^3 + 4r_i^3 + 3r_i^2 r_{i+1})}{36} \varphi_i \right. \\
 & + \frac{(4r_{i+1}^3 - r_i^3 + 3r_{i+1}^2 r_i)}{36} \varphi_{i+1} \\
 & + \left. \frac{(r_{i+1}^3 + r_i^3 + r_{i+1}^2 r_i + r_i^2 r_{i+1})}{6} \varphi_{i+\frac{1}{2}} \right] \\
 & - \frac{(r_{i+1} - r_i)}{2} \left(r_{i+\frac{1}{3}}^3 S_{i+\frac{1}{3}} + r_{i+\frac{2}{3}}^3 S_{i+\frac{2}{3}} \right) = 0
 \end{aligned}$$

pour $1 - 1 \geq i \geq 0$.

En résumé, le calcul de la solution approchée $\varphi_h \in W_h$, se fait de la manière suivante :

Schéma 1.1. La solution $\varphi_h \in W_h$ approchant la solution φ du problème (1.1), (1.2) est déterminée par la résolution des équations :

$$\begin{aligned}
 (1.17) \quad & \frac{(2r_i^2 + r_i r_{i+1})}{3} \varphi_i - \frac{(2r_{i+1}^2 + r_i r_{i+1})}{3} \varphi_{i+1} + \frac{2}{3} (r_{i+1}^2 - r_i^2) \varphi_{i+\frac{1}{2}} \\
 & + \sigma(r_{i+1} - r_i) \left[\frac{(5r_i^2 - r_{i+1}^2 + 2r_i r_{i+1})}{36} \varphi_i \right. \\
 & + \left. \frac{(5r_{i+1}^2 - r_i^2 + 2r_i r_{i+1})}{36} \varphi_{i+1} + \frac{2}{9} (r_{i+1}^2 + r_i^2 + r_i r_{i+1}) \varphi_{i+\frac{1}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

$$-\frac{(r_{i+1} - r_i)}{2} \left[r_{i+\frac{1}{3}}^2 S_{i+\frac{1}{3}} + r_{i+\frac{2}{3}}^2 S_{i+\frac{2}{3}} \right] = 0$$

pour $l-1 \geq i \geq 0$.

$$(1.18) \quad \begin{aligned} & \frac{(-11r_{i+1}^3 - 7r_{i+1}^2 r_i - 3r_{i+1} r_i^2 + r_i^3)}{20} \varphi_{i+1} \\ & + \frac{(-r_{i+1}^3 + 3r_{i+1}^2 r_i + 7r_{i+1} r_i^2 + 11r_i^3)}{20} \varphi_i \\ & + \frac{(3r_{i+1}^3 + r_{i+1}^2 r_i - r_{i+1} r_i^2 - 3r_i^3)}{5} \varphi_{i+\frac{1}{2}} \\ & + \sigma(r_{i+1} - r_i) \left[\frac{(-r_{i+1}^3 + 4r_i^3 + 3r_i^2 r_{i+1})}{36} \varphi_i \right. \\ & + \frac{(4r_{i+1}^3 - r_i^3 + 3r_{i+1}^2 r_i)}{36} \varphi_{i+1} \\ & + \left. \frac{(r_{i+1}^3 + r_i^3 + r_{i+1}^2 r_i + r_i^2 r_{i+1})}{6} \varphi_{i+\frac{1}{2}} \right] \\ & - \frac{(r_{i+1} - r_i)}{2} \left[r_{i+\frac{1}{3}}^3 S_{i+\frac{1}{3}} + r_{i+\frac{2}{3}}^3 S_{i+\frac{2}{3}} \right] = 0 \end{aligned}$$

pour $l-1 \geq i \geq 0$

$$(1.19) \quad \varphi_l \equiv 0.$$

Les calculs sont effectués intervalle par intervalle en partant de $i = l-1$ et en faisant décroître l'indice i .

Analysons au sens des différences finies les équations (1.17) et (1.18).

Définition 1.1 : Soit φ la solution du problème (1.1), (1.2) en remplaçant

φ_i par $\varphi(r_i)$ dans les équations (1.17) ou (1.18), on définit

E_i . On appelle erreur de troncature la quantité

$$E = \frac{1}{\Delta r} \max_{0 \leq i \leq l-1} |E_i|.$$

Si on suppose que φ est suffisamment régulière et que $(r_{i+1} - r_i) = \Delta r$,
 $0 \leq i \leq l-1$, pour l'équation (1.17) on aura :

$$\begin{aligned}
 (1.20) \quad E_i = & -(\Delta r) \frac{(r_{i+1}^2 + r_i^2 + r_i r_{i+1})}{3} \frac{d\varphi}{dr} \\
 & - (\Delta r)^2 \frac{(3r_{i+1}^2 + r_i^2 + 2r_i r_{i+1})}{12} \frac{d^2\varphi}{dr^2} - (\Delta r)^3 \frac{(7r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})}{72} \frac{d^3\varphi}{dr^3} \\
 & - (\Delta r)^4 \frac{(15r_{i+1}^2 + r_i^2 + 8r_i r_{i+1})}{24 \times 24} \frac{d^4\varphi}{dr^4} \\
 & + \sigma(\Delta r) \left[\frac{(r_{i+1}^2 + r_i^2 + r_i r_{i+1})}{3} \varphi(r_i) + (\Delta r) \frac{(3r_{i+1}^2 + r_i^2 + 2r_i r_{i+1})}{12} \frac{d\varphi}{dr} \right. \\
 & + (\Delta r)^2 \frac{(7r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})}{72} \frac{d^2\varphi}{dr^2} + (\Delta r)^3 \frac{(2r_{i+1}^2 + r_i r_{i+1})}{72} \frac{d^3\varphi}{dr^3} \Big] \\
 & - (\Delta r) \left[\frac{(r_{i+1}^2 + r_i^2 + r_i r_{i+1})}{3} S(r_i) + \frac{(3r_{i+1}^2 + r_i^2 + 2r_i r_{i+1})}{12} (\Delta r) \frac{dS}{dr} \right. \\
 & + (\Delta r)^2 \frac{(7r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})}{72} \frac{d^2S}{dr^2} + (\Delta r)^3 \frac{(11r_{i+1}^2 + r_i^2 + 6r_i r_{i+1})}{24 \times 18} \frac{d^3S}{dr^3} \Big]
 \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
 (1.21) \quad E_i = & (\Delta r) \frac{(r_{i+1}^2 + r_i^2 + r_i r_{i+1})}{3} \left[-\frac{d\varphi}{dr} + \sigma\varphi - S \right] (r_i) \\
 & + (\Delta r)^2 \frac{(3r_{i+1}^2 + r_i^2 + 2r_i r_{i+1})}{12} \left[-\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \sigma \frac{d\varphi}{dr} - \frac{dS}{dr} \right] (r_i) \\
 & + (\Delta r)^3 \frac{(7r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})}{72} \left[-\frac{d^3\varphi}{dr^3} + \sigma \frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{d^2S}{dr^2} \right] (r_i) + o(r_i^2 \Delta r^4).
 \end{aligned}$$

Donc E est en $o(r^2 \Delta r^3)$.

On remarque que : Pour l'équation (1.17) divisée par r_{i+1}^2 on obtient une
 erreur de troncature en $o(\Delta r^3)$. Par contre, si on approxime le flux φ par
 des polynômes de P_1 , en utilisant la formulation de Reed Lathrop [13],

l'erreur de troncature est en $o\left(\frac{\Delta r^2}{r_{i+1}^2}\right)$.

Pour l'équation (1, 18), on a :

$$\begin{aligned}
 (1.22) \quad E_i = & -\frac{\Delta r}{4} (r_{i+1}^3 + r_i^3 + r_{i+1}^2 r_i + r_{i+1} r_i^2) \frac{d\varphi}{dr} \\
 & - \frac{(\Delta r)^2}{20} (4r_{i+1}^3 + r_i^3 + 2r_{i+1} r_i^2 + 3r_{i+1}^2 r_i) \frac{d^2\varphi}{dr^2} \\
 & - \frac{(\Delta r)^3}{240} (19r_{i+1}^3 + r_i^3 + 7r_{i+1} r_i^2 + 13r_{i+1}^2 r_i) \frac{d^3\varphi}{dr^3} \\
 & - \frac{(\Delta r)^4}{24 \times 80} (41r_{i+1}^3 + 13r_{i+1} r_i^2 + 27r_{i+1}^2 r_i - r_i^3) \frac{d^4\varphi}{dr^4} \\
 & + \sigma(\Delta r) \left\{ \frac{(r_{i+1}^3 + r_i^3 + r_i^2 r_{i+1} + r_{i+1}^2 r_i)}{4} \varphi(r_i) \right. \\
 & + \Delta r \frac{(7r_{i+1}^3 + 2r_i^3 + 6r_{i+1}^2 r_i + 3r_i^2 r_{i+1})}{36} \frac{d\varphi}{dr} \\
 & + \frac{(\Delta r)^2}{144} (11r_{i+1}^3 + r_i^3 + 9r_{i+1}^2 r_i + 3r_{i+1} r_i^2) \frac{d^2\varphi}{dr^2} \\
 & + \frac{(\Delta r)^3}{24 \times 36} (19r_{i+1}^3 - r_i^3 + 15r_{i+1}^2 r_i + 3r_i^2 r_{i+1}) \frac{d^3\varphi}{dr^3} \Big\} \\
 & - (\Delta r) \left\{ \frac{(r_{i+1}^3 + r_i^3 + r_i^2 r_{i+1} + r_{i+1}^2 r_i)}{4} S(r_i) \right. \\
 & + \frac{(\Delta r)}{36} (7r_{i+1}^3 + 2r_i^3 + 3r_i^2 r_{i+1} + 6r_i r_{i+1}^2) \frac{dS}{dr} \\
 & + \frac{(\Delta r)^2}{144} (11r_{i+1}^3 + r_i^3 + 9r_{i+1}^2 r_i + 3r_{i+1} r_i^2) \frac{d^2S}{dr^2} \\
 & + (\Delta r)^3 \frac{(52r_{i+1}^3 + 2r_i^3 + 42r_{i+1}^2 r_i + 12r_i^2 r_{i+1})}{12 \times 9 \times 24} \frac{d^3S}{dr^3} \Big\}.
 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que :

$$(1.23) \quad \frac{(4r_{i+1}^3 + r_i^3 + 2r_{i+1}r_i + 3r_{i+1}^2r_i)}{20} \\ = \frac{(7r_{i+1}^3 + 2r_i^3 + 6r_{i+1}^2r_i + 3r_i^2r_{i+1})}{36} + \frac{(\Delta r)^3}{180}$$

$$(1.24) \quad \frac{(19r_{i+1}^3 + r_i^3 + 7r_{i+1}r_i^2 + 13r_{i+1}^2r_i)}{240} \\ = \frac{(11r_{i+1}^3 + r_i^3 + 9r_{i+1}^2r_i + 3r_i^2r_{i+1})}{144} + \frac{(\Delta r)^3}{360}$$

on obtient :

$$(1.25) \quad E_i = \Delta r \frac{(r_{i+1}^3 + r_i^3 + r_i^2r_{i+1} + r_{i+1}^2r_i)}{4} \left(-\frac{d\varphi}{dr} + \sigma\varphi - S \right) (r_i) \\ + (\Delta r)^2 \frac{(7r_{i+1}^3 + 2r_i^3 + 6r_{i+1}^2r_i + 3r_i^2r_{i+1})}{36} \left(-\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \sigma \frac{d\varphi}{dr} - \frac{dS}{dr} \right) (r_i) \\ + (\Delta r)^3 \frac{(11r_{i+1}^3 + r_i^3 + 9r_{i+1}^2r_i + 3r_{i+1}r_i^2)}{144} \left(-\frac{d^3\varphi}{dr^3} + \sigma \frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{d^2S}{dr^2} \right) (r_i) \\ + o(r_i^3 \Delta r^4).$$

On en déduit que : E est en $o(r^3 \Delta r^3)$.

L'équation (1.18) divisée par r_{i+1}^3 a donc une erreur de troncature en $o(\Delta r^3)$.

C'est-à-dire la même que celle obtenue pour l'équation (1.17).

Pour satisfaire la propriété de conservation 2 de façon discrète, un autre choix est possible, c'est celui qui consiste à prendre une formule de quadrature avec poids et qui soit exacte pour le polynôme P_3 . Elle s'écrit de la façon suivante :

$$(1.26) \quad \int_{r_i}^{r_{i+1}} r f(r) dr \sim w_{i+\frac{1}{3}} f\left(r_{i+\frac{1}{3}}\right) + w_{i+\frac{2}{3}} f\left(r_{i+\frac{2}{3}}\right).$$

Les paramètres $w_{i+\frac{1}{3}}$, $r_{i+\frac{1}{3}}$, $w_{i+\frac{2}{3}}$, $r_{i+\frac{2}{3}}$ doivent satisfaire les relations :

$$(1.27) \quad r_{i+1}^2 - r_i^2 = 2 \left(w_{i+\frac{1}{3}} + w_{i+\frac{2}{3}} \right), \quad 0 \leq i \leq I-1$$

$$(1.28) \quad r_{i+1}^3 - r_i^3 = 3 \left(w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}} + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}} \right), \quad 0 \leq i \leq I-1$$

$$(1.29) \quad r_{i+1}^4 - r_i^4 = 4 \left(w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^2 + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^2 \right), \quad 0 \leq i \leq I-1$$

$$(1.30) \quad r_{i+1}^5 - r_i^5 = 5 \left(w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^3 + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^3 \right), \quad 0 \leq i \leq I-1.$$

En utilisant des résultats d'intégration numérique [12], on peut montrer que dans ce cas, $w_{i+\frac{1}{3}}$, $r_{i+\frac{1}{3}}$, $w_{i+\frac{2}{3}}$, $r_{i+\frac{2}{3}}$ sont donnés par les formules

suivantes :

$$(1.31) \quad r_{i+\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} \frac{(r_{i+1}^3 + r_i^3 + 4r_{i+1}^2 r_i + 4r_{i+1} r_i^2)}{r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1}} - \frac{\sqrt{6}}{10} \frac{(r_{i+1} - r_i) \sqrt{H}}{(r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})}$$

$$(1.32) \quad r_{i+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \frac{(r_{i+1}^3 + r_i^3 + 4r_{i+1}^2 r_i + 4r_{i+1} r_i^2)}{r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1}} + \frac{\sqrt{6}}{10} \frac{(r_{i+1} - r_i) \sqrt{H}}{(r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})}$$

$$(1.33) \quad w_{i+\frac{1}{3}} = (r_{i+1} - r_i) \left[\frac{(r_{i+1} + r_i)}{4} - \frac{(r_{i+1}^3 + 6r_{i+1}^2 r_i - 6r_{i+1} r_i^2 - r_i^3)}{6\sqrt{6} \sqrt{H}} \right]$$

$$(1.34) \quad w_{i+\frac{2}{3}} = (r_{i+1} - r_i) \left[\frac{(r_{i+1} + r_i)}{4} + \frac{(r_{i+1}^3 + 6r_{i+1}^2 r_i - 6r_{i+1} r_i^2 - r_i^3)}{6\sqrt{6} \sqrt{H}} \right]$$

où :

$$(1.35) \quad H = r_{i+1}^4 + r_i^4 + 10r_{i+1}^3 r_i + 10r_{i+1} r_i^3 + 28r_{i+1}^2 r_i^2.$$

Il est aisé de voir que la relation suivante :

$$\begin{aligned} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varphi) dr &= w_{i+\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varphi) \Big|_{r_{i+\frac{1}{3}}} + w_{i+\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varphi) \Big|_{r_{i+\frac{2}{3}}} \\ &= r_{i+1}^2 \varphi_{i+1} - r_i^2 \varphi_i \quad \forall \varphi \in P_2 \end{aligned}$$

reste encore vérifiée.

On va donner une nouvelle écriture des équations (1.4) à l'aide de la formule (1.26).

Grâce aux relations (1.27), (1.28), (1.29), (1.30), les équations (1.4) pour $\psi_h = 1$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} (1.36) \quad & \frac{(2r_i^2 + r_i r_{i+1})}{3} \varphi_i - \frac{(2r_{i+1}^2 + r_i r_{i+1})}{3} \varphi_{i+1} + \frac{2}{3} (r_{i+1}^2 - r_i^2) \varphi_{i+\frac{1}{2}} \\ & + \sigma(r_{i+1} - r_i) \left\{ \frac{(9r_{i+1}^2 + 2r_i r_{i+1} - r_i^2)}{60} \varphi_{i+1} \right. \\ & \left. + \frac{(-r_{i+1}^2 + 2r_i r_{i+1} + 9r_i^2)}{60} \varphi_i + \frac{(3r_{i+1}^2 + 4r_{i+1} r_i + 3r_i^2)}{15} \varphi_{i+\frac{1}{2}} \right\} \\ & - \left(w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}} s_{i+\frac{1}{3}} + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}} s_{i+\frac{2}{3}} \right) = 0 \end{aligned}$$

pour $1-i \geq i \geq 0$.

L'écriture des équations (1.4) pour $\psi_h = r$ nécessite en plus des relations (1.27), (1.28), (1.29) et (1.30) une relation supplémentaire qui est donnée par l'expression suivante :

$$(1.37) \quad w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^4 + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^4 = \frac{3(r_{i+1} - r_i)(11r_i^7 + 11r_{i+1}^7 + 55r_i^6 r_{i+1} + 55r_{i+1}^6 r_i + 69r_{i+1}^5 r_i^2 + 69r_i^5 r_{i+1}^2 + 65r_{i+1}^3 r_i^4 + 65r_i^3 r_{i+1}^4)}{200(r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})}$$

Compte tenu de (1.27), (1.28), (1.29), (1.30) et (1.37), les relations (1.4) pour $\psi_h = r$ s'écrivent :

$$(1.38) \quad \begin{aligned} & \frac{(r_i^3 - 7r_{i+1}^2 r_i - 3r_{i+1} r_i^2 - 11r_{i+1}^3)}{20} \varphi_{i+1} \\ & + \frac{(11r_i^3 + 7r_{i+1} r_i^2 + 3r_{i+1}^2 r_i - r_{i+1}^3)}{20} \varphi_i \\ & + \frac{(3r_{i+1}^3 + r_{i+1}^2 r_i - r_{i+1} r_i^2 - 3r_i^3)}{5} \varphi_{i+\frac{1}{2}} \\ & + \sigma(r_{i+1} - r_i) \left\{ \frac{(-2r_{i+1}^5 - 9r_{i+1}^4 r_i + 6r_{i+1}^3 r_i^2 + 36r_{i+1}^2 r_i^3 + 56r_{i+1} r_i^4 + 13r_i^5)}{100(r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})} \varphi_i \right. \\ & + \frac{(13r_{i+1}^5 + 56r_{i+1}^4 r_i + 36r_{i+1}^3 r_i^2 + 6r_{i+1}^2 r_i^3 - 9r_{i+1} r_i^4 - 2r_i^5)}{100(r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})} \varphi_{i+1} \\ & + \left. \frac{(7r_{i+1}^5 + 7r_i^5 + 39r_{i+1}^4 r_i + 39r_i^4 r_{i+1} + 54r_{i+1}^3 r_i^2 + 54r_{i+1}^2 r_i^3)}{50(r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})} \varphi_{i+\frac{1}{2}} \right\} \\ & - \left(w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^2 S_{i+\frac{1}{3}} + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^2 S_{i+\frac{2}{3}} \right) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq l-1. \end{aligned}$$

Schéma 1.2. Ce schéma est constitué des équations (1.36), (1.38) et (1.19). La résolution de ces équations permet le calcul du flux approché le long de la caractéristique $\mu = -1$. Le sens de la résolution est le même que celui du schéma 1.1.

Supposons que : $(r_{i+1} - r_i) = \Delta r$, $0 \leq i \leq l-1$

et que la solution φ du problème (1.1), (1.2) est suffisamment régulière.

En suivant la définition (1.1), on montre que pour l'équation (1.36) E_i est donné par :

$$\begin{aligned}
 (1.39) \quad E_i = & -\Delta r \frac{(r_{i+1}^2 + r_i^2 + r_i r_{i+1})}{3} \frac{d\varphi}{dr} - (\Delta r)^2 \frac{(3r_{i+1}^2 + r_i^2 + 2r_i r_{i+1})}{12} \frac{d^2\varphi}{dr^2} \\
 & - (\Delta r)^3 \frac{(7r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})}{72} \frac{d^3\varphi}{dr^3} - (\Delta r)^4 \frac{(15r_{i+1}^2 + r_i^2 + 8r_i r_{i+1})}{24 \times 24} \frac{d^4\varphi}{dr^4} \\
 & + \sigma(\Delta r) \left\{ \frac{(r_{i+1}^2 + r_i^2 + r_i r_{i+1})}{3} \varphi(r_i) + (\Delta r) \frac{(3r_{i+1}^2 + r_i^2 + 2r_i r_{i+1})}{12} \frac{d\varphi}{dr} \right. \\
 & + (\Delta r)^2 \frac{(7r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})}{72} \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{(\Delta r)^4}{6 \times 5 \times 12} \frac{d^2\varphi}{dr^2} \\
 & + (\Delta r)^3 \frac{(15r_{i+1}^2 + r_i^2 + 8r_i r_{i+1})}{24 \times 24} \frac{d^3\varphi}{dr^3} + (\Delta r)^4 \frac{(9r_{i+1} + r_i)}{144 \times 20} \frac{d^3\varphi}{dr^3} \Big\} \\
 & - (\Delta r) \left\{ \frac{(r_{i+1}^2 + r_i^2 + r_i r_{i+1})}{3} S(r_i) + (\Delta r) \frac{(3r_{i+1}^2 + r_i^2 + 2r_i r_{i+1})}{12} \frac{dS}{dr} \right. \\
 & + (\Delta r)^2 \frac{(7r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})}{72} \frac{d^2S}{dr^2} + \frac{(\Delta r)^4}{6 \times 5 \times 12} \frac{d^2S}{dr^2} \\
 & \left. + (\Delta r)^3 \frac{(99r_{i+1}^3 + 432r_{i+1}^2 r_i + 270r_{i+1} r_i^2 + 88r_{i+1} r_i^3 + 11r_i^4)}{3600(r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})} \frac{d^3S}{dr^3} \right\}.
 \end{aligned}$$

En utilisant la relation :

$$\begin{aligned}
 (1.40) \quad & \frac{(99r_{i+1}^4 + 432r_{i+1}^3 r_i + 270r_{i+1}^2 r_i^2 + 88r_{i+1} r_i^3 + 11r_i^4)}{3600(r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})} = \\
 & \frac{(15r_{i+1}^2 + r_i^2 + 8r_i r_{i+1})}{24 \times 24} + (r_{i+1} - r_i) \frac{(21r_{i+1}^3 + 49r_{i+1}^2 r_i - 71r_{i+1} r_i^2 - 19r_i^3)}{3600 \times 25(r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})}
 \end{aligned}$$

on en déduit que E est en $O(r \Delta r^4)$.

On remarque que pour l'équation (1.36) divisée par r_{i+1}^2 on obtient une erreur de troncature en $O\left(\frac{\Delta r^4}{r}\right)$. Un raisonnement analogue au précédent montre que pour l'équation (1.38) on obtient la même chose.

1.2 - Stabilité et convergence des schémas 1.1 et 1.2

Dans ce paragraphe, on va établir la stabilité des schémas 1.1 et 1.2 c'est-à-dire établir une majoration de la norme de la solution discrète, en fonction de la norme du terme de source. Pour la convergence, on va appliquer cette majoration à l'erreur c'est-à-dire à la différence entre la solution exacte et la solution discrète.

On commence par le schéma 1.1.

Pour toute fonction v définie et continue sur $[0, R]$, on définit

$$(2.1) \quad |v|_{Y,h} = \left(\sum_{i=0}^{l-1} w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^\gamma v_{i+\frac{1}{3}}^2 + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^\gamma v_{i+\frac{2}{3}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

analogue discret de la norme avec poids

$$(2.2) \quad |v|_Y = \left(\int_0^R r^\gamma v^2 dr \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 2.1 : Pour tout triplet de scalaires $(\varphi_i, \varphi_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{i+1})$ satisfaisant

les relations (1.17) et (1.18), pour $0 \leq i \leq l-1$, on a :

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & \frac{(9r_{i+1}^2 + 22r_i r_{i+1} + 59r_i^2)}{180} \varphi_i^2 - \frac{(59r_{i+1}^2 + 22r_i r_{i+1} + 9r_i^2)}{180} \varphi_{i+1}^2 \\ & + \frac{4}{9} (r_{i+1}^2 - r_i^2) \varphi_{i+\frac{1}{2}}^2 + \frac{(-3r_{i+1}^2 + 7r_i^2 - 4r_i r_{i+1})}{45} \varphi_{i+1} \varphi_{i+\frac{1}{2}} \\ & + \frac{(3r_i^2 - 7r_{i+1}^2 + 4r_i r_{i+1})}{45} \varphi_i \varphi_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2)}{18} \varphi_i \varphi_{i+1} \\ & + [w r^2 (\sigma \varphi_h - S) \varphi_h]_{i+\frac{1}{3}}^{i+\frac{2}{3}} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq l-1. \end{aligned}$$

Démonstration : On considère les équations (1.4) pour un ψ_h qui vérifie

$$\psi_h\left(r_{i+\frac{1}{3}}\right) = \varphi_{i+\frac{1}{3}} \text{ et } \psi_h\left(r_{i+\frac{2}{3}}\right) = \varphi_{i+\frac{2}{3}}.$$

Le ψ_h construit de cette façon est donné par :

$$(2.4) \quad \psi_h(r) = \frac{(2r_{i+1} + r_i)}{3(r_{i+1} - r_i)} \varphi_i - \frac{(r_{i+1} + 2r_i)}{3(r_{i+1} - r_i)} \varphi_{i+1} + \frac{2}{3} \varphi_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)}{(r_{i+1} - r_i)} \cdot r$$

Les relations (1.4) deviennent alors :

$$(2.5) \quad \left[\frac{(2r_{i+1} + r_i)}{3(r_{i+1} - r_i)} \varphi_i - \frac{(r_{i+1} + 2r_i)}{3(r_{i+1} - r_i)} \varphi_{i+1} + \frac{2}{3} \varphi_{i+\frac{1}{2}} \right] \\ \times \left[\frac{(2r_i^2 + r_i r_{i+1})}{3} \varphi_i - \frac{(2r_{i+1}^2 + r_i r_{i+1})}{3} \varphi_{i+1} + \frac{2}{3} (r_{i+1}^2 - r_i^2) \varphi_{i+\frac{1}{2}} \right] \\ + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)}{(r_{i+1} - r_i)} \times \left\{ \frac{(-11r_{i+1}^3 - 7r_{i+1}^2 r_i - 3r_{i+1} r_i^2 + r_i^3)}{20} \varphi_{i+1} \right. \\ + \frac{(-r_{i+1}^3 + 3r_{i+1}^2 r_i + 7r_{i+1} r_i^2 + 11r_i^3)}{20} \varphi_i \\ \left. + \frac{(3r_{i+1}^3 + r_{i+1}^2 r_i - r_{i+1} r_i^2 - 3r_i^3)}{5} \varphi_{i+\frac{1}{2}} \right\} \\ + w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^2 \left(\sigma \varphi_{i+\frac{1}{3}}^2 - S_{i+\frac{1}{3}} \varphi_{i+\frac{1}{3}} \right) + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^2 \left(\sigma \varphi_{i+\frac{2}{3}}^2 - S_{i+\frac{2}{3}} \varphi_{i+\frac{2}{3}} \right) = 0$$

pour $0 \leq i \leq l-1$.

En effectuant, on tombe sur la relation (2.3)

Lemme 2.2 : On suppose que $r_{i+1} - r_i = \Delta r$, $0 \leq i \leq l-1$. On a :

$$(2.6) \quad \prod_{i=1}^{l-1} \frac{(r_{i+1}^2(32+3\epsilon) + r_i^2(2-7\epsilon) + r_i r_{i+1}(11+4\epsilon))}{(r_{i+1}^2(2-7\epsilon) + r_i^2(32+3\epsilon) + r_i r_{i+1}(11+4\epsilon))} \frac{r_i^\gamma}{r_{i+1}^\gamma} \leq$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} c & \text{si } \gamma \geq \frac{12+4\epsilon}{9} \\ c \Delta r^{-\gamma - \frac{12+4\epsilon}{9}} & \text{si } \gamma < \frac{12+4\epsilon}{9} \end{array} \right.$$

$$(2.7) \quad \prod_{i=1}^{l-1} \frac{(r_{i+1}^2(2-7\epsilon) + r_i^2(32+3\epsilon) + r_i r_{i+1}(11+4\epsilon))}{(r_{i+1}^2(32+3\epsilon) + r_i^2(2-7\epsilon) + r_i r_{i+1}(11+4\epsilon))} \times \frac{r_{i+1}^\gamma}{r_i^\gamma} \leq$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \Delta r^{-\gamma + \frac{12+4\epsilon}{9}} & \text{si } \gamma > \frac{12+4\epsilon}{9} \\ c & \text{si } \gamma \leq \frac{12+4\epsilon}{9} \end{array} \right.$$

où c est une constante positive indépendante de Δr , et ϵ positif $\geq \frac{1}{4}$.

Démonstration : On pose $a_i^\epsilon = \frac{r_{i+1}^2(32+3\epsilon) + r_i^2(2-7\epsilon) + r_i r_{i+1}(11+4\epsilon)}{r_{i+1}^2(2-7\epsilon) + r_i^2(32+3\epsilon) + r_i r_{i+1}(11+4\epsilon)} \left(\frac{r_i}{r_{i+1}}\right)^\gamma$

On a : $r_i = i \Delta r$ et donc :

$$a_i^\epsilon = \frac{45i^2 + i(75+10\epsilon) + 32+3\epsilon}{45i^2 + i(15-10\epsilon) + 2-7\epsilon} \left(\frac{i}{i+1}\right)^\gamma.$$

En développant suivant les puissances de $\frac{1}{i}$ on aura :

$$\begin{aligned} a_i^\epsilon &= \left(1 + \frac{(15+2\epsilon)}{9} \frac{1}{i} + \left(\frac{32+3\epsilon}{45}\right) \frac{1}{i^2}\right) \left(1 - \frac{(3-2\epsilon)}{9} \frac{1}{i} + \frac{(2-7\epsilon)}{45} \frac{1}{i^2}\right) \\ &\times \left(1 - \frac{\gamma}{i} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2i^2}\right). \end{aligned}$$

Soit encore :

$$a_i^\epsilon = 1 + \left(\frac{12+4\epsilon}{9} - \gamma\right) \frac{1}{i} + o\left(\frac{1}{i^2}\right).$$

si $\gamma = \frac{12+4\epsilon}{9}$, la série $\sum_{i=1}^l \text{Log } a_i^\epsilon$ converge d'où

$$(2.8) \quad \prod_{i=1}^{l-1} a_i^\epsilon \leq C$$

si $\gamma \neq \frac{12+4\epsilon}{9}$, la série $\sum_{i=1}^l \text{Log } a_i^\epsilon - \left(\frac{12+4\epsilon}{9} - \gamma\right) \text{Log } l$ converge d'où

$$(2.9) \quad \prod_{i=1}^{l-1} a_i^\epsilon \leq C l^{\gamma - \frac{(12+4\epsilon)}{9}} \quad \text{si} \quad \gamma < \frac{12+4\epsilon}{9}$$

$$(2.10) \quad \prod_{i=1}^{l-1} a_i^\epsilon \leq C \quad \text{si} \quad \gamma > \frac{12+4\epsilon}{9}.$$

Des inégalités (2.8), (2.9) et (2.10) on déduit l'inégalité (2.6). Pour l'inégalité (2.7) on procède de la même manière.

Lemme 2.3 : Le schéma I.1 est stable pour les normes $|\cdot|_{\gamma, h}$ avec $\gamma \geq \frac{13}{9}$. Plus précisément, on a les majorations :

$$(2.11) \quad \max_{1 \leq i \leq l-1} r_i^\gamma \varphi_i^2 + c |\varphi_h|_{\gamma, h}^2 \leq C |S|_{\gamma, h}^2 \quad \text{si} \quad \gamma \geq \frac{13}{9}$$

$$(2.12) \quad \max_{1 \leq i \leq l-1} r_i^\gamma \varphi_i^2 + c |\varphi_h|_{\gamma, h}^2 \leq C \Delta r^{\gamma - \frac{13}{9}} |S|_{\gamma, h}^2 \quad \text{si} \quad \gamma < \frac{13}{9}$$

Démonstration : On considère les relations (2.3) du lemme 2.1, en utilisant les inégalités suivantes :

$$(2.13) \quad \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2)}{18} \varphi_i \varphi_{i+1} \geq - \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2)}{36} (\varphi_i^2 + \varphi_{i+1}^2)$$

$$(2.14) \quad \frac{(3r_i^2 - 7r_{i+1}^2 + 4r_i r_{i+1})}{45} \varphi_i \varphi_{i+\frac{1}{2}} \geq \frac{(3r_i^2 - 7r_{i+1}^2 + 4r_i r_{i+1})}{90} \left(\epsilon \varphi_i^2 + \frac{1}{\epsilon} \varphi_{i+\frac{1}{2}}^2 \right)$$

$$(2.15) \quad \frac{(-3r_{i+1}^2 + 7r_i^2 - 4r_i r_{i+1})}{45} \varphi_{i+1} \varphi_{i+\frac{1}{2}} \\ \geq \frac{(-3r_{i+1}^2 + 7r_i^2 - 4r_i r_{i+1})}{90} \left(\epsilon \varphi_{i+1}^2 + \frac{1}{\epsilon} \varphi_{i+\frac{1}{2}}^2 \right).$$

Avec $\epsilon > 0$, on obtient :

$$(2.16) \quad \frac{(r_{i+1}^2(2-7\epsilon) + r_i^2(32+3\epsilon) + r_i r_{i+1}(11+4\epsilon))}{90} \varphi_i^2 \\ - \frac{(r_{i+1}^2(32+3\epsilon) + r_i^2(2-7\epsilon) + r_i r_{i+1}(11+4\epsilon))}{90} \varphi_{i+1}^2 + \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2)}{9} \left(4 - \frac{1}{\epsilon}\right) \varphi_{i+\frac{1}{2}}^2 \\ + [w r^2 (\sigma \varphi_h - S) \varphi_h]_{i+\frac{1}{3}}^{i+\frac{2}{3}} \leq 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq l-1.$$

La relation (2.16) peut encore s'écrire :

$$(2.17) \quad \frac{(r_{i+1}^2(2-7\epsilon) + r_i^2(32+3\epsilon) + r_i r_{i+1}(11+4\epsilon))}{90 r_i^\gamma} r_i^\gamma \varphi_i^2 \\ - \frac{(r_{i+1}^2(32+3\epsilon) + r_i^2(2-7\epsilon) + r_i r_{i+1}(11+4\epsilon))}{90 r_{i+1}^\gamma} r_{i+1}^\gamma \varphi_{i+1}^2 \\ + \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2)}{9} \left(4 - \frac{1}{\epsilon}\right) \varphi_{i+\frac{1}{2}}^2 + \sigma \left(w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^2 \varphi_{i+\frac{1}{3}}^2 + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^2 \varphi_{i+\frac{2}{3}}^2 \right) \\ \leq w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^2 S_{i+\frac{1}{3}} \varphi_{i+\frac{1}{3}} + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^2 S_{i+\frac{2}{3}} \varphi_{i+\frac{2}{3}}.$$

Il existe deux constantes > 0 , c et C , indépendantes de Δr telles que, pour $1 \leq i \leq l-1$,

$$c \leq \frac{90 r_i^\gamma r_{i+\frac{1}{3}}^{2-\gamma}}{r_{i+1}^2(2-7\epsilon) + r_i^2(32+3\epsilon) + r_i r_{i+1}(11+4\epsilon)} \leq C,$$

$$c \leq \frac{90 r_i^\gamma r_{i+\frac{2}{3}}^{2-\gamma}}{r_{i+1}^2(2-7\epsilon) + r_i^2(32+3\epsilon) + r_i r_{i+1}(11+4\epsilon)} \leq C.$$

De la relation (2.17), on déduit que :

$$\begin{aligned} (2.18) \quad & r_i^\gamma \varphi_i^2 - a_i^\epsilon r_{i+1}^\gamma \varphi_{i+1}^2 \\ & + \frac{4 - \frac{1}{\epsilon}}{9} \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2) \times r_i^\gamma \times 90}{(r_{i+1}^2(2-7\epsilon) + r_i^2(32+3\epsilon) + r_i r_{i+1}(11+4\epsilon))} \varphi_{i+\frac{1}{2}}^2 \\ & + c \left(w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^\gamma \varphi_{i+\frac{1}{3}}^2 + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^\gamma \varphi_{i+\frac{2}{3}}^2 \right) \\ & \leq C \left(r_{i+\frac{1}{3}}^\gamma w_{i+\frac{1}{3}} S_{i+\frac{1}{3}}^2 + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^\gamma S_{i+\frac{2}{3}}^2 \right). \end{aligned}$$

En sommant sur tous les indices i , les relations (2.18), on aura :

$$\begin{aligned} (2.19) \quad & r_j^\gamma \varphi_j^2 + c \left(4 - \frac{1}{\epsilon} \right) \sum_{j \leq \ell \leq l-1} r_\ell^\gamma \prod_{j \leq k \leq \ell} (a_k^\epsilon) \varphi_{\ell+\frac{1}{2}}^2 \\ & + c \left(\sum_{j \leq \ell \leq l-1} w_{\ell+\frac{1}{3}} r_{\ell+\frac{1}{3}}^\gamma \prod_{j \leq k \leq \ell} (a_k^\epsilon) \varphi_{\ell+\frac{1}{3}}^2 + w_{\ell+\frac{2}{3}} r_{\ell+\frac{2}{3}}^\gamma \prod_{j \leq k \leq \ell} (a_k^\epsilon) \varphi_{\ell+\frac{2}{3}}^2 \right) \\ & \leq C \left(\sum_{j \leq \ell \leq l-1} w_{\ell+\frac{1}{3}} r_{\ell+\frac{1}{3}}^\gamma \prod_{j \leq k \leq \ell} (a_k^\epsilon) S_{\ell+\frac{1}{3}}^2 + w_{\ell+\frac{2}{3}} r_{\ell+\frac{2}{3}}^\gamma \prod_{j \leq k \leq \ell} (a_k^\epsilon) S_{\ell+\frac{2}{3}}^2 \right) \end{aligned}$$

ceci pour $1 \leq j \leq l-1$.

En utilisant le lemme (2.2) et la relation (2.19), on conclut que :

si $\gamma \geq \frac{13}{9}$ en choisissant ϵ tel que $\gamma = \frac{12+4\epsilon}{9}$, on obtient l'inégalité (2.11),

si $\gamma < \frac{13}{9}$ en choisissant $\epsilon = \frac{1}{4}$, on obtient l'inégalité (2.12).

Remarque 2.1 : Le lemme 2.3 donne une stabilité pour tous les poids $\gamma \geq \frac{13}{9}$, et une stabilité faible pour les autres.

On va s'intéresser maintenant à la précision du schéma numérique 1.1. Pour cela, on établit d'abord quelques lemmes de majoration d'erreur.

Définition 2.1 : Soit w une fonction continue sur $[0, R]$, sa fonction W_h interpolée est l'unique fonction $\tilde{w} \in W_h$ égale à w aux abscisses $r_i, r_{i+\frac{1}{2}}, r_{i+1}$, $0 \leq i \leq I-1$.

Lemme 2.4 : Soit une fonction $w \in H^4(0, R)$, on a :

$$(2.20) \quad |(w - \tilde{w})(r_{i+\frac{1}{3}})| \leq c \Delta r^{\frac{5}{2}} |w|_{3,2}(r_i, r_{i+1})$$

$$(2.21) \quad |(w - \tilde{w})(r_{i+\frac{2}{3}})| \leq c \Delta r^{\frac{5}{2}} |w|_{3,2}(r_i, r_{i+1})$$

$$(2.22) \quad \left| \frac{\partial}{\partial r} (w - \tilde{w})(r_{i+\frac{1}{3}}) \right| \leq c \Delta r^{\frac{5}{2}} |w|_{4,2}(r_i, r_{i+1})$$

$$(2.23) \quad \left| \frac{\partial}{\partial r} (w - \tilde{w})(r_{i+\frac{2}{3}}) \right| \leq c \Delta r^{\frac{5}{2}} |w|_{4,2}(r_i, r_{i+1}).$$

Pour $0 \leq i \leq I-1$; où C est une constante > 0 indépendante de Δr .

Démonstration : Soit $\hat{H} = [-1, +1]$ l'intervalle de référence et $F_{H_i} \in P_1$ la transformation qui envoie $\hat{H}$ sur l'intervalle $H_i = [r_i, r_{i+1}]$.

On a : $r_{i+\frac{1}{3}} = F_{H_i}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

A la fonction w , on associe $\hat{w} = w \circ F_{H_i}$, on a :

$$(w - \tilde{w})(r_{i+\frac{1}{3}}) = (\hat{w} - \tilde{\hat{w}})\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

L'application linéaire $\hat{w} \longrightarrow (\hat{w} - \tilde{w}) \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ est continue de $H^3(\hat{H})$ dans $\mathbb{R}$, et est identique à zéro pour tout $\hat{w} \in P_2$. En utilisant des résultats de [3], on a donc :

$$(2.24) \quad |(w - \tilde{w}) \left(r_{i+\frac{1}{3}}\right)| = |(\hat{w} - \tilde{w}) \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)| \leq c |\hat{w}|_{3,2,\hat{H}}$$

et d'après [2] on a :

$$(2.25) \quad |\hat{w}|_{k,2,\hat{H}} \leq c \Delta r^{k-\frac{1}{2}} |w|_{k,2,H_i}, \text{ pour } k = 3, 4.$$

En combinant les inégalités (2.24) et (2.25), on obtient la majoration (2.20) ; la majoration (2.21) se démontre de la même façon.

$$\frac{\partial}{\partial r} (w - \tilde{w}) \left(r_{i+\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{\Delta r} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{w} - \tilde{w}) \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right).$$

L'application linéaire $\hat{w} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{w} - \tilde{w}) \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ est continue de $H^4(\hat{H})$ dans $\mathbb{R}$, et identiquement nulle pour tout $\hat{w} \in P_3$:

En effet : si $\hat{w} = \xi^3$ alors $\tilde{w} = \xi$ et $\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{w} - \tilde{w}) \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$.

D'après [3], on a :

$$(2.26) \quad \left|\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{w} - \tilde{w}) \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right| \leq c |\hat{w}|_{4,2,\hat{H}}.$$

Les inégalités (2.26) et (2.25) entraînent la majoration (2.22). Pour la majoration (2.23), on procède de la même façon.

Théorème 2.1 : Soit $\varphi \in H^4(0, R)$ la solution du problème (1.1), (1.2) et φ_h la solution du schéma 1.1. On a alors :

$$(2.27) \quad |\varphi - \varphi_h|_{\gamma, h} \leq \begin{cases} c \Delta r^3 \|\varphi\|_{4,2,(0,R)} & \text{si } \gamma \geq \frac{13}{9} \\ c \Delta r^{\frac{9\gamma+41}{18}} \|\varphi\|_{4,2,(0,R)} & \text{si } \gamma < \frac{13}{9}. \end{cases}$$

Démonstration : La relation (1.4) peut s'écrire :

$$(2.28) \quad \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^2 \frac{d\varphi_h}{dr} \psi_h dr + \left(r^2 (\sigma \varphi_h - S) \psi_h w \right)_{i+\frac{1}{3}} + \left(r^2 (\sigma \varphi_h - S) \psi_h w \right)_{i+\frac{2}{3}} = 0.$$

Soit $\tilde{\varphi}$ l'interpolée de φ .

De la relation (2.28) retranchons l'expression suivante :

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} r^2 \frac{d\tilde{\varphi}}{dr} \psi_h dr + \left(r^2 \sigma \tilde{\varphi} \psi_h w \right)_{i+\frac{1}{3}} + \left(r^2 \sigma \tilde{\varphi} \psi_h w \right)_{i+\frac{2}{3}}.$$

On obtient :

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} r^2 \frac{d}{dr} (\varphi_h - \tilde{\varphi}) \psi_h dr + \left(r^2 \sigma (\varphi_h - \tilde{\varphi}) \psi_h w \right)_{i+\frac{1}{3}} + \left(r^2 \sigma (\varphi_h - \tilde{\varphi}) \psi_h w \right)_{i+\frac{2}{3}}$$

qui est égal à :

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} r^2 \frac{d\tilde{\varphi}}{dr} \psi_h dr - \left(r^2 \frac{d\tilde{\varphi}}{dr} \psi_h w \right)_{i+\frac{1}{3}} - \left(r^2 \frac{d\tilde{\varphi}}{dr} \psi_h w \right)_{i+\frac{2}{3}} + \left(r^2 S' \psi_h w \right)_{i+\frac{1}{3}} + \left(r^2 S' \psi_h w \right)_{i+\frac{2}{3}}$$

avec
$$S' = - \frac{d}{dr} (\varphi - \tilde{\varphi}) + \sigma (\varphi - \tilde{\varphi}).$$

On est donc ramené à majorer le terme :

$$X = \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^2 \frac{d\tilde{\varphi}}{dr} \psi_h dr - \left(r^2 \frac{d\tilde{\varphi}}{dr} \psi_h w \right)_{i+\frac{1}{3}} - \left(r^2 \frac{d\tilde{\varphi}}{dr} \psi_h w \right)_{i+\frac{2}{3}}$$

qui peut encore s'écrire (car $\frac{d\tilde{\varphi}}{dr} \in P_1$ et $\psi_h \in P_1$) :

$$X = \int_{r_i}^{r_{i+1}} (r - r_i)^2 \frac{d\tilde{\varphi}}{dr} \psi_h dr - \left((r - r_i)^2 \frac{d\tilde{\varphi}}{dr} \psi_h w \right)_{i+\frac{1}{3}} - \left((r - r_i)^2 \frac{d\tilde{\varphi}}{dr} \psi_h w \right)_{i+\frac{2}{3}}.$$

En posant $z = \frac{d\tilde{\varphi}}{dr}$ et en passant à l'intervalle de référence $\hat{H} = [-1, +1]$ on aura :

$$X = \frac{\Delta r}{2} \hat{X}$$

avec

$$\hat{X} = \int_{-1}^{+1} (\hat{r} - \hat{r}_i)^2 \hat{z} \hat{\psi}_h d\xi - \left((\hat{r} - \hat{r}_i)^2 \hat{z} \hat{\psi}_h \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \left((\hat{r} - \hat{r}_i)^2 \hat{z} \hat{\psi}_h \right) \left(+\frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

On peut montrer (sans difficulté) que :

$$|\hat{X}| \leq |\hat{z}|_{H^1(\hat{H})} \left(c \Delta r^2 |\hat{\psi}_h|_{L^2(\hat{H})} \right).$$

L'application linéaire : $\hat{z} \longrightarrow \hat{X}$

est continue de $H^1(\hat{H})$ dans $\mathbb{R}$, de norme $\leq c \Delta r^2 |\hat{\psi}_h|_{L^2(\hat{H})}$ et identiquement nulle pour tout $\hat{z} \in P_0$.

D'après [3] on en déduit que :

$$|\hat{X}| \leq c \Delta r^2 |\hat{z}|_{H^1(\hat{H})} |\hat{\psi}_h|_{L^2(\hat{H})}$$

et donc :

$$|X| \leq C \Delta r^3 |z|_{1, \hat{H}} \|\psi_h\|_h.$$

Il reste à majorer le terme S^1 , or

$$|S^1|_{Y, h}^2 = \sum_{i=0}^{I-1} w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^\gamma S_{i+\frac{1}{3}}^{12} + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^\gamma S_{i+\frac{2}{3}}^{12}.$$

Le lemme 2.4 nous permet d'avoir la majoration suivante :

$$(2.29) \quad |S'|_{\gamma, h}^2 \leq c(\Delta r)^6 \|\varphi\|_{4,2,(0,R)}^2.$$

En remplaçant φ_h par $\varphi_h - \tilde{\varphi}$ dans les inégalités (2.11) et (2.12) et en utilisant la majoration (2.29), on obtient :

$$(2.30) \quad |\varphi_h - \tilde{\varphi}|_{\gamma, h} \leq \begin{cases} c\Delta r^3 \|\varphi\|_{4,2,(0,R)} & \text{si } \gamma \geq \frac{13}{9} \\ c\Delta r^{\frac{9\gamma+41}{18}} \|\varphi\|_{4,2,(0,R)} & \text{si } \gamma < \frac{13}{9}. \end{cases}$$

D'autre part, on a $\varphi(r_i) = \tilde{\varphi}(r_i)$ et $\tilde{\varphi}(r_{i+\frac{1}{2}}) = \varphi(r_{i+\frac{1}{2}})$.

Le lemme 2.4 donne :

$$|\varphi - \tilde{\varphi}|_{\gamma, h} \leq C\Delta r^3 \|\varphi\|_{4,2,(0,R)}.$$

La majoration (2.27) est alors une conséquence de l'inégalité (2.30).

Nous arrivons maintenant au schéma I.2.

Comme pour le schéma numérique I.1, nous allons étudier la stabilité et la convergence du schéma I.2.

Pour toute fonction définie et continue sur $[0, R]$, on définit :

$$(2.31) \quad |v|_{\gamma, h} = \left(\sum_{i=0}^{l-1} w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^{\gamma-1} v_{i+\frac{1}{3}}^2 + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^{\gamma-1} v_{i+\frac{2}{3}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

analogue discret de la norme avec poids définie par la relation (2.2).

$w_{i+\frac{1}{3}}, r_{i+\frac{1}{3}}, w_{i+\frac{2}{3}}, r_{i+\frac{2}{3}}$ sont donnés par les expressions (1.31), (1.32),

(1.33) et (1.34).

Pour faciliter l'étude de la stabilité du schéma I.2, nous établissons le lemme suivant :

Lemme 2.5 : Pour tout triplet de scalaires $(\varphi_i, \varphi_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{i+1})$ satisfaisant

les relations (1.36), (1.38), pour $0 \leq i \leq l-1$ on a :

$$\begin{aligned}
 (2.32) \quad & -\frac{(13r_{i+1} + 2r_i)}{30} \varphi_{i+1}^2 + \frac{(13r_i + 2r_{i+1})}{30} \varphi_i^2 + \frac{4}{15} (r_{i+1} - r_i) \varphi_{i+\frac{1}{2}}^2 \\
 & - \frac{(r_{i+1} - r_i)}{30} \varphi_i \varphi_{i+1} + \frac{(r_{i+1} - r_i)}{15} \varphi_{i+1} \varphi_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(r_{i+1} - r_i)}{15} \varphi_i \varphi_{i+\frac{1}{2}} \\
 & + [w(\sigma \varphi_h - S) \varphi_h]_{i+\frac{1}{3}} + [w(\sigma \varphi_h - S) \varphi_h]_{i+\frac{2}{3}} = 0.
 \end{aligned}$$

Démonstration : Considérons la relation (1.4) ; elle peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 (2.33) \quad & [w(-r \frac{d\varphi_h}{dr} + r(\sigma \varphi_h - S)) \psi_h] (r_{i+\frac{1}{3}}) \\
 & + [w(-r \frac{d\varphi_h}{dr} + r(\sigma \varphi_h - S)) \psi_h] (r_{i+\frac{2}{3}}) = 0 \quad \forall \psi_h \in P_1.
 \end{aligned}$$

Dans la relation (2.33), on remplace ψ_h successivement par

$$\frac{r_{i+\frac{2}{3}} - r}{r_{i+\frac{2}{3}} - r_{i+\frac{1}{3}}} \quad \text{et} \quad \frac{r - r_{i+\frac{1}{3}}}{r_{i+\frac{2}{3}} - r_{i+\frac{1}{3}}} \quad \text{on obtient :}$$

$$(2.34) \quad \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \sigma \varphi_h - S\right) (r_{i+\frac{1}{3}}) = 0$$

$$(2.35) \quad \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \sigma \varphi_h - S\right) (r_{i+\frac{2}{3}}) = 0.$$

On multiplie l'équation (2.34) par $(w\varphi)_{i+\frac{1}{3}}$, et l'équation (2.35) par $(w\varphi)_{i+\frac{2}{3}}$

puis on fait la somme. On aura :

$$(2.36) \quad [w(-\frac{d\varphi_h}{dr} \varphi_h)]_{i+\frac{1}{3}}^{i+\frac{2}{3}} + [w(\sigma \varphi_h - S) \varphi_h]_{i+\frac{1}{3}}^{i+\frac{2}{3}} = 0$$

or

$$\begin{aligned} \left[w \left(- \frac{d\varphi_h}{dr} \varphi_h \right) \right]_{i+\frac{1}{3}}^{i+\frac{2}{3}} &= \int_{r_i}^{r_{i+1}} - r \frac{d\varphi_h}{dr} \varphi_h dr \\ &= \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dr} (r \varphi_h^2) - \frac{1}{2} \varphi_h^2 \right] dr. \end{aligned}$$

La relation (2.36) devient alors :

$$(2.37) \quad \frac{1}{2} r_i \varphi_i^2 - \frac{1}{2} r_{i+1} \varphi_{i+1}^2 + \frac{1}{2} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \varphi_h^2 dr + \left[w (\sigma \varphi_h - S) \varphi_h \right]_{i+\frac{1}{3}}^{i+\frac{2}{3}} = 0.$$

Le terme $\frac{1}{2} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \varphi_h^2 dr$ se calcule en utilisant l'expression de φ_h donnée par la relation (1.13).

$$(2.38) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \varphi_h^2 dr &= \frac{\Delta r}{15} \varphi_i^2 + \frac{\Delta r}{15} \varphi_{i+1}^2 + \frac{4}{15} \Delta r \varphi_{i+\frac{1}{2}}^2 - \frac{\Delta r}{30} \varphi_i \varphi_{i+1} \\ &\quad + \frac{\Delta r}{15} \varphi_{i+1} \varphi_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta r}{15} \varphi_i \varphi_{i+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La relation (2.32) est une conséquence immédiate des relations (2.37) et (2.38).

Lemme 2.6 : On suppose que $r_{i+1} - r_i = \Delta r$, $0 \leq i \leq l-1$, on a :

$$(2.39) \quad \prod_{i=1}^{l-1} \frac{r_{i+1}(27+2\epsilon) + r_i(3-2\epsilon)}{r_{i+1}(3-2\epsilon) + r_i(27+2\epsilon)} \frac{r_i^\gamma}{r_{i+1}^\gamma} \leq \begin{cases} c \text{ si } \gamma \geq \frac{12+2\epsilon}{15} \\ c \Delta r^{\gamma - \frac{12+2\epsilon}{15}} \text{ si } \gamma < \frac{12+2\epsilon}{15} \end{cases}$$

$$(2.40) \quad \prod_{i=1}^{l-1} \frac{r_{i+1}(3-2\epsilon) + r_i(27+2\epsilon)}{r_i(3-2\epsilon) + r_{i+1}(27+2\epsilon)} \frac{r_{i+1}^\gamma}{r_i^\gamma} \leq \begin{cases} c \Delta r^{\frac{12+2\epsilon}{15} - \gamma} \text{ si } \gamma > \frac{12+2\epsilon}{15} \\ c \text{ si } \gamma \leq \frac{12+2\epsilon}{15} \end{cases}$$

où C est une constante positive indépendante de Δr et ϵ positif $\geq \frac{1}{4}$.

La démonstration de ce lemme est la même que celle du lemme 2.2.

Lemme 2.7 : Le schéma 1.2 est stable pour les normes $|\cdot|_{\gamma, h}$ avec $\gamma \geq \frac{5}{6}$ et on a les majorations :

$$(2.41) \quad \max_{1 \leq i \leq l-1} r_i^\gamma \varphi_i^2 + c |\varphi_h|_{\gamma, h}^2 \leq \begin{cases} c |S|_{\gamma, h}^2 & \text{si } \gamma \geq \frac{5}{6} \\ c \Delta r^{\gamma - \frac{5}{6}} |S|_{\gamma, h}^2 & \text{si } \gamma < \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Démonstration : On considère les relations (2.32) du lemme (2.5) en utilisant les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta r}{30} (\varphi_i \varphi_{i+1}) &\geq -\frac{\Delta r}{60} (\varphi_i^2 + \varphi_{i+1}^2) \\ +\frac{\Delta r}{15} \varphi_{i+1} \varphi_{i+\frac{1}{2}} &\geq -\frac{\Delta r}{30} \left(\epsilon \varphi_{i+1}^2 + \frac{1}{\epsilon} \varphi_{i+\frac{1}{2}}^2 \right) \\ \frac{\Delta r}{15} \varphi_i \varphi_{i+\frac{1}{2}} &\geq -\frac{\Delta r}{30} \left(\epsilon \varphi_i^2 + \frac{1}{\epsilon} \varphi_{i+\frac{1}{2}}^2 \right). \end{aligned}$$

On obtient l'inégalité suivante :

$$(2.42) \quad \frac{r_i(27+2\epsilon) + r_{i+1}(3-2\epsilon)}{60} \varphi_i^2 - \frac{r_{i+1}(27+2\epsilon) + r_i(3-2\epsilon)}{60} \varphi_{i+1}^2 \\ + \frac{4-\frac{1}{\epsilon}}{15} \Delta r \varphi_{i+\frac{1}{2}}^2 + \left(\sigma w \varphi_h^2 \right)_{i+\frac{1}{3}} + \left(\sigma w \varphi_h^2 \right)_{i+\frac{2}{3}} \leq \left(w S \varphi_h \right)_{i+\frac{1}{3}} + \left(w S \varphi_h \right)_{i+\frac{2}{3}}.$$

En utilisant des techniques déjà vues au lemme 2.3 et les résultats du lemme 2.6, on obtient la majoration (2.41) en choisissant ϵ tel que

$\frac{12+2\epsilon}{15} = \gamma$ si $\gamma \geq \frac{5}{6}$ et $\epsilon = \frac{1}{4}$ si $\gamma < \frac{5}{6}$, ce qui achève la démonstration du lemme 2.7.

Remarque 2.2 : Les résultats du lemme 2.7 montrent que le schéma 1.2 est stable pour tous les poids $\gamma \geq \frac{5}{6}$ et stable faiblement pour les autres valeurs de γ .

On passe maintenant à l'étude de la précision du schéma 1.2.

Lemme 2.8 : Pour toute fonction $w \in H^4(0, R)$, on a :

$$(2.43) \quad |(w - \tilde{w})\left(r_{i+\frac{1}{3}}\right)| \leq c \Delta r^{\frac{5}{2}} |w|_{3,2}(r_i, r_{i+1})$$

$$(2.44) \quad |(w - \tilde{w})\left(r_{i+\frac{2}{3}}\right)| \leq c \Delta r^{\frac{5}{2}} |w|_{3,2}(r_i, r_{i+1})$$

$$(2.45) \quad \left| \frac{\partial}{\partial r} (w - \tilde{w})\left(r_{i+\frac{1}{3}}\right) \right| \leq c \Delta r^{\frac{5}{2}} \left[\frac{c'}{r_{i+1}} |w|_{3,2}(r_i, r_{i+1}) + |w|_{4,2}(r_i, r_{i+1}) \right]$$

$$(2.46) \quad \left| \frac{\partial}{\partial r} (w - \tilde{w})\left(r_{i+\frac{2}{3}}\right) \right| \leq c \Delta r^{\frac{5}{2}} \left[\frac{c'}{r_{i+1}} |w|_{3,2}(r_i, r_{i+1}) + |w|_{4,2}(r_i, r_{i+1}) \right]$$

et ceci pour $0 \leq i \leq I-1$.

Démonstration : En raisonnant comme dans le lemme (2.4), on montre les majorations (2.43) et (2.44).

Soit $\hat{H} = [-1, +1]$ l'intervalle de référence et $F_{H_i} \in P_1$ la transformation qui envoie l'intervalle $\hat{H}$ sur l'intervalle $H_i = [r_i, r_{i+1}]$.

$$\text{On a :} \quad r_{i+\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} \frac{(r_{i+1}^3 + r_i^3 + 4r_i^2 r_{i+1} + 4r_{i+1}^2 r_i)}{(r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})} - \frac{\sqrt{6}(r_{i+1} - r_i)\sqrt{H}}{10(r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})}$$

$$\text{avec } H = r_{i+1}^4 + r_i^4 + 10r_i^3 r_{i+1} + 10r_{i+1}^3 r_i + 28r_{i+1}^2 r_i^2$$

$$r_{i+\frac{1}{3}} = F_{H_i}(\epsilon_{i+\frac{1}{3}}),$$

avec

$$\epsilon_{i+\frac{1}{3}} = \frac{(r_{i+1} - r_i)(r_{i+1} + r_i) - \sqrt{6H}}{5(r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(w - \tilde{w})(r_{i+\frac{1}{3}}) = \frac{2}{\Delta r} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{w} - \tilde{\hat{w}})(\epsilon_{i+\frac{1}{3}}) \right), \quad \hat{w} = w \circ F_{H_i}.$$

L'application linéaire $\hat{w} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{w} - \tilde{\hat{w}})(\epsilon_{i+\frac{1}{3}})$ est continue de $H^4(\hat{H})$ dans $\mathbb{R}$,

et on a pour tout $\hat{w} \in P_3$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{w} - \tilde{\hat{w}})(\epsilon_{i+\frac{1}{3}}) \right| \leq c(3\epsilon_{i+\frac{1}{3}}^2 - 1) |\hat{w}|_{3,2,\hat{H}}.$$

En effet : si $\hat{w} = \xi^3$, $\tilde{\hat{w}} = \xi$ et $\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{w} - \tilde{\hat{w}})(\epsilon_{i+\frac{1}{3}}) = 3\epsilon_{i+\frac{1}{3}}^2 - 1$.

D'après le lemme 0.4, [10], on a pour tout $\hat{w} \in H^4(\hat{H})$:

$$(2.47) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{w} - \tilde{\hat{w}})(\epsilon_{i+\frac{1}{3}}) \right| \leq c(3\epsilon_{i+\frac{1}{3}}^2 - 1) |\hat{w}|_{3,2,\hat{H}} \\ + (c(3\epsilon_{i+\frac{1}{3}}^2 - 1) + c') |\hat{w}|_{4,2,\hat{H}}$$

or :

$$3\epsilon_{i+\frac{1}{3}}^2 - 1 = \frac{-4r_{i+1}^4 - 4r_i^4 + 48r_i^2 r_{i+1}^2 - 20r_i^3 r_{i+1} - 20r_{i+1}^3 r_i - 6(r_{i+1} - r_i)(r_{i+1} + r_i)\sqrt{6H}}{25(r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})^2} \\ = (r_{i+1} - r_i) \left[\frac{(r_{i+1} - r_i)(-4r_{i+1}^2 - 28r_i r_{i+1} - 4r_i^2) - 6(r_{i+1} + r_i)\sqrt{6H}}{25(r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})^2} \right].$$

On en déduit que :

$$(2.48) \quad \left| 3\epsilon_{i+\frac{1}{3}}^2 - 1 \right| \leq c \frac{\Delta r}{r_{i+1}}.$$

En combinant les inégalités (2.47) et (2.48), on obtient la majoration (2.45).
Pour la majoration (2.46), on raisonne de la même façon.

Théorème 2.2 : Soit $\varphi \in H^4(0, R)$ la solution du problème (1.1), (1.2) et φ_h la solution du schéma 1.2. On suppose que $r_{i+1} - r_i = \Delta r$, $0 \leq i \leq l-1$.

On a le résultat suivant :

$$(2.49) \quad |\varphi - \varphi_h|_{\gamma, h} \leq C \left(|\varphi|_{3, \infty, (0, R)} + \|\varphi\|_{4, 2, (0, R)} \right) \times \begin{cases} \Delta r^3 & \text{si } 1 < \gamma \leq 2 \\ \Delta r^3 |\text{Log } \Delta r|^{\frac{1}{2}}, & \gamma = 1 \\ \Delta r^{\frac{5+\gamma}{2}}, & \frac{5}{6} \leq \gamma < 1 \\ \Delta r^{\frac{25+12\gamma}{12}}, & 0 \leq \gamma < \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Démonstration : Considérons les relations (1.4) qu'on écrit sous la forme :

$$(2.50) \quad \left[\left(-r \frac{d\varphi_h}{dr} + r(\sigma \varphi_h - S) \right) \Psi_h w \right] \left(r_{i+\frac{1}{3}} \right) + \left[\left(-r \frac{d\varphi_h}{dr} + r(\sigma \varphi_h - S) \right) \Psi_h w \right] \left(r_{i+\frac{2}{3}} \right) = 0.$$

Soit $\tilde{\varphi}$ l'interpolée de φ , la fonction $\varphi_h - \tilde{\varphi}$ vérifie l'équation (2.50) avec, au lieu de S , un autre terme S' défini de la façon suivante :

$$S'(r) = -\frac{\partial}{\partial r} (\varphi - \tilde{\varphi}) + \sigma (\varphi - \tilde{\varphi}).$$

On est donc ramené à majorer le terme S'

$$|S'|_{\gamma, h}^2 = \sum_{i=0}^{l-1} w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^{\gamma-1} S'^2_{i+\frac{1}{3}} + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^{\gamma-1} S'^2_{i+\frac{2}{3}}.$$

En utilisant le lemme 2.8, on a :

$$w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^{\gamma-1} S_{i+\frac{1}{3}}'^2 + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^{\gamma-1} S_{i+\frac{2}{3}}'^2$$

$$\leq c \Delta r^6 \left(r_{i+1}^{\gamma-2} |\varphi|_{3,2,H_i}^2 + r_{i+1}^{\gamma} \|\varphi\|_{4,2,H_i}^2 \right).$$

On en déduit que :

$$|S'|_{\gamma,h}^2 \leq c \left(\Delta r^6 \sum_{i=0}^{l-1} r_{i+1}^{\gamma} \|\varphi\|_{4,2,H_i}^2 \right.$$

$$\left. + \Delta r^6 \sum_{i=0}^{l-1} \Delta r r_{i+1}^{\gamma-2} |\varphi|_{3,\infty,(0,R)}^2 \right).$$

Le deuxième terme du membre de gauche se majore de la façon suivante :

$$(2.51) \quad \sum_{i=0}^{l-1} \Delta r r_{i+1}^{\gamma-2} \leq \begin{cases} c & \text{si } 1 < \gamma \leq 2 \\ c |\text{Log } \Delta r| & \text{si } \gamma = 1 \\ c \Delta r^{\gamma-1} & \text{si } 0 \leq \gamma < 1 \end{cases}$$

et donc :

$$(2.52) \quad |S'|_{\gamma,h}^2 \leq c \Delta r^6 \left(\|\varphi\|_{4,2,(0,R)}^2 + \begin{cases} \Delta r^{\gamma-1} |\varphi|_{3,\infty,(0,R)}^2 & \text{si } 0 \leq \gamma < 1 \\ |\text{Log } \Delta r| |\varphi|_{3,\infty,(0,R)}^2 & \text{si } \gamma = 1 \\ |\varphi|_{3,\infty,(0,R)}^2 & \text{si } \gamma > 1 \end{cases} \right).$$

Dans le résultat de stabilité établi par le lemme 2.7, on remplace φ_h par $\varphi_h - \tilde{\varphi}$ et on utilise l'inégalité (2.52) ; on obtient la majoration (2.49) pour $\varphi_h - \tilde{\varphi}$. Pour conclure, il suffit d'utiliser la majoration suivante :

$$|\varphi - \tilde{\varphi}|_{\gamma,h} \leq c \Delta r^3 \|\varphi\|_{4,2,(0,R)}$$

qu'on obtient à partir du lemme 2.4.

1.3 - Résultats numériques

Dans ce paragraphe, on donne sous forme de tableaux, les divers résultats numériques obtenus lors du déroulement des schémas 1.1 et 1.2 sur machine (IRIS 50 ordinateur du Centre de Calcul de Besançon).

On définit des erreurs pour $r = r_{i+1}$, $r = r_{i+\frac{1}{2}}$, $r = r_{i+\frac{1}{3}}$ et $r = r_{i+\frac{2}{3}}$ par

$$E1 = \left(\Delta r \sum_{i=0}^{I-1} r_{i+1}^{\gamma} \left(\varphi_{i+1} - \varphi(r_{i+1}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E2 = \left(\Delta r \sum_{i=0}^{I-1} r_{i+\frac{1}{2}}^{\gamma} \left(\varphi_{i+\frac{1}{2}} - \varphi(r_{i+\frac{1}{2}}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E3 = \left(\Delta r \sum_{i=0}^{I-1} r_{i+\frac{1}{3}}^{\gamma} \left(\varphi_{i+\frac{1}{3}} - \varphi(r_{i+\frac{1}{3}}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E4 = \left(\Delta r \sum_{i=0}^{I-1} r_{i+\frac{2}{3}}^{\gamma} \left(\varphi_{i+\frac{2}{3}} - \varphi(r_{i+\frac{2}{3}}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On veut évaluer numériquement E1, E2, E3 et E4 pour différentes valeurs de γ et pour les deux schémas. Pour cela, on a fait deux tests numériques, le premier avec

$$\sigma = 1, R = 3, S = \sin \frac{\pi r}{3} - \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi r}{3}, \varphi_R = 0, \varphi = \sin \left(\frac{\pi r}{3} \right)$$

le second avec

$$\sigma = 1, R = 3, S = r^5 - 7r^4 + 5r^3 + 9r^2, \varphi_R = 0, \varphi = r^5 - 2r^4 - 3r^3$$

On pose $\Delta r = \frac{R}{I}$.

Les essais ont été effectués pour plusieurs valeurs de Δr ; on donne ici les valeurs numériques de $E1, E2, E3, E4$, pour $\gamma = 0, \gamma = \frac{2}{3}, \gamma = 1, \gamma = 2$ et pour deux valeurs de Δr .

Pour le schéma 1.1, les résultats des deux tests sont donnés dans le tableau suivant :

Tableau n°1

φ	γ	E1		E2		E3		E4	
		$\Delta r = 0,1$	$\Delta r = 0,05$	$\Delta r = 0,1$	$\Delta r = 0,05$	$\Delta r = 0,1$	$\Delta r = 0,05$	$\Delta r = 0,1$	$\Delta r = 0,05$
$\sin \frac{\pi r}{3}$	0	$0,3886.10^{-5}$	$0,378.10^{-6}$	$0,3379.10^{-5}$	$0,3176.10^{-6}$	$0,194.10^{-4}$	$0,2017.10^{-5}$	$0,1057.10^{-4}$	$0,1348.10^{-5}$
	$\frac{2}{3}$	$0,2058.10^{-5}$	$0,165.10^{-6}$	$0,1317.10^{-5}$	$0,9787.10^{-7}$	$0,1343.10^{-4}$	$0,1063.10^{-5}$	$0,1211.10^{-4}$	$0,1528.10^{-5}$
	1	$0,1556.10^{-5}$	$0,1151.10^{-6}$	$0,9033.10^{-6}$	$0,6021.10^{-7}$	$0,1425.10^{-4}$	$0,175.10^{-5}$	$0,1359.10^{-4}$	$0,1711.10^{-5}$
	2	$0,8566.10^{-6}$	$0,5492.10^{-7}$	$0,7944.10^{-6}$	$0,5026.10^{-7}$	$0,2111.10^{-4}$	$0,2631.10^{-5}$	$0,208.10^{-4}$	$0,2610.10^{-5}$
$r^5 - 2r^4 - 3r^3$	0	$0,1019.10^{-3}$	$0,1037.10^{-4}$	$0,6882.10^{-4}$	$0,713.10^{-5}$	$0,2078.10^{-2}$	$0,2578.10^{-3}$	$0,2133.10^{-2}$	$0,2676.10^{-3}$
	$\frac{2}{3}$	$0,9306.10^{-4}$	$0,1025.10^{-4}$	$0,3064.10^{-4}$	$0,5443.10^{-5}$	$0,2817.10^{-2}$	$0,3514.10^{-3}$	$0,2937.10^{-2}$	$0,3675.10^{-3}$
	1	$0,1012.10^{-3}$	$0,1153.10^{-4}$	$0,2435.10^{-4}$	$0,6001.10^{-5}$	$0,33.10^{-2}$	$0,4122.10^{-3}$	$0,3454.10^{-2}$	$0,4323.10^{-3}$
	2	$0,1542.10^{-3}$	$0,1816.10^{-4}$	$0,2481.10^{-4}$	$0,9245.10^{-5}$	$0,5341.10^{-2}$	$0,6691.10^{-3}$	$0,5646.10^{-2}$	$0,7051.10^{-3}$

En analysant les résultats du tableau n°1, on remarque que E1 et E2 indiquent une erreur en $O(\Delta r^p)$ avec $3 < p < 4$ et ceci pour tous les poids. Pour $\gamma = 2$, E3 et E4 montrent que l'erreur est en $O(\Delta r^3)$, ce qui correspond exactement au théorème 2.1.

Mathématiquement, nous avons obtenu des résultats de stabilité faible pour le poids $\gamma < \frac{13}{9}$, ce qui entraîne une erreur en $O(\Delta r^p)$, $2 < p < 3$ (Théorème 2.1).

Les résultats numériques suggèrent que les résultats obtenus par le théorème sont un peu pessimistes.

Les résultats numériques relatifs au schéma 1.2 sont rassemblés dans le tableau n°2.

Tableau n°2

φ	γ	E1		E2		E3		E4	
		$\Delta r = 0,1$	$\Delta r = 0,05$	$\Delta r = 0,1$	$\Delta r = 0,05$	$\Delta r = 0,1$	$\Delta r = 0,05$	$\Delta r = 0,1$	$\Delta r = 0,05$
$\sin \frac{\pi r}{3}$	0	$0,1263.10^{-5}$	$0,1133.10^{-5}$	$0,9803.10^{-6}$	$0,7674.10^{-7}$	$0,1118.10^{-4}$	$0,1404.10^{-5}$	$0,1082.10^{-4}$	$0,1381.10^{-5}$
	$\frac{2}{3}$	$0,7125.10^{-6}$	$0,5307.10^{-7}$	$0,7499.10^{-6}$	$0,4943.10^{-7}$	$0,1252.10^{-4}$	$0,1558.10^{-5}$	$0,1217.10^{-4}$	$0,1536.10^{-5}$
	1	$0,5724.10^{-6}$	$0,3956.10^{-7}$	$0,7571.10^{-6}$	$0,4855.10^{-7}$	$0,1397.10^{-4}$	$0,1737.10^{-5}$	$0,1361.10^{-4}$	$0,1714.10^{-5}$
	2	$0,449.10^{-6}$	$0,2774.10^{-7}$	$0,1026.10^{-5}$	$0,6506.10^{-7}$	$0,2115.10^{-4}$	$0,2634.10^{-5}$	$0,2074.10^{-4}$	$0,2606.10^{-5}$
$r^5 - 2r^4 - 3r^3$	0	$0,4018.10^{-4}$	$0,2762.10^{-5}$	$0,103.10^{-3}$	$0,7316.10^{-5}$	$0,2137.10^{-2}$	$0,2656.10^{-3}$	$0,205.10^{-2}$	$0,2583.10^{-3}$
	$\frac{2}{3}$	$0,4214.10^{-4}$	$0,2455.10^{-5}$	$0,1403.10^{-3}$	$0,1.10^{-4}$	$0,2925.10^{-2}$	$0,364.10^{-3}$	$0,282.10^{-2}$	$0,3549.10^{-3}$
	1	$0,4597.10^{-4}$	$0,2671.10^{-5}$	$0,1651.10^{-3}$	$0,1179.10^{-4}$	$0,3429.10^{-2}$	$0,4271.10^{-3}$	$0,3315.10^{-2}$	$0,4169.10^{-3}$
	2	$0,6432.10^{-4}$	$0,3977.10^{-5}$	$0,2722.10^{-3}$	$0,1945.10^{-4}$	$0,5556.10^{-2}$	$0,6936.10^{-3}$	$0,5414.10^{-2}$	$0,6797.10^{-3}$

On peut interpréter les résultats du tableau n°2 de la façon suivante :

Les erreurs E1 et E2 permettent d'avoir un degré de convergence égal à 4, sauf pour $\gamma = 0$ où il est compris entre 3 et 4, ce qui peut s'expliquer par l'avantage de l'utilisation de normes avec poids.

E3 et E4 indiquent une erreur en $O(\Delta r^3)$ pour toutes les valeurs de γ . L'estimation donnée par le théorème 2.2 se trouve donc justifiée dans le cas où $\gamma \geq \frac{5}{6}$; dans le cas contraire, elle est un peu pessimiste. Ceci est dû au fait que nous n'avons pu obtenir que des résultats de stabilité faible du schéma 1.2 pour $\gamma < \frac{5}{6}$.

CHAPITRE II

=====

DESCRIPTION DES SCHEMAS NUMERIQUES ET STABILITE

=====

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la discrétisation du problème (0.1), (0.2) suivant la variable d'espace r , et la variable angulaire μ . Pour cela on va procéder à une étude analogue à celle faite au chapitre I, et au cours de laquelle on fera souvent appel à des résultats antérieurs. Le plan du chapitre est le suivant :

- 1) On donne des conditions suffisantes pour satisfaire les propriétés de conservation. On définit une méthode d'éléments finis continue [10], permettant d'obtenir des schémas numériques, que l'on peut résoudre maille par maille, en suivant la direction caractéristique.
- 2) On fait une étude mathématique de la stabilité, de ces schémas numériques, pour différentes normes avec poids, équivalents discrets de la norme :

$$\left(\int_0^R \int_{-1}^{+1} \frac{r^\gamma}{(1-\mu^2)^s} u^2 dr d\mu \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{pour } \begin{array}{l} 0 \leq \gamma \leq 2, \\ 0 \leq s \leq 1. \end{array}$$

II.1 - Ecriture des schémas numériques

et propriétés de conservation

Ce paragraphe est consacré à la description de schémas numériques que l'on construit au moyen de méthodes continues, utilisées pour approcher le problème (0.1), (0.2), lorsqu'on suppose que la restriction du flux approché à chaque rectangle du maillage, décrit au chapitre 0, est un polynôme de degré 2 en r , et de degré 1 en μ . On établit des conditions suffisantes pour que les schémas satisfassent de façon discrète les propriétés de conservation.

Pour des entiers I et $J \geq 1$, on découpe les intervalles $[-1, +1]$ et $[0, R]$, de la manière suivante :

$$(1.1) \quad -1 = \mu_{-J} < \mu_{-J+1} < \dots < \mu_0 = 0 < \mu_1 < \dots < \mu_{J-1} < \mu_J = +1$$

$$(1.2) \quad 0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{I-1} < r_I = R.$$

Dans la suite, on suppose, comme c'est le cas en pratique ([6], [13]) que :

$$(1.3) \quad \mu_{-j+1} = -\mu_{j-1}, \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, J.$$

Le domaine $\overline{\Omega} = [0, R] \times [-1, +1]$ est découpé en rectangles K_{ij}

$$(1.4) \quad K_{ij} = [r_i, r_{i+1}] \times [\mu_j, \mu_{j+1}], \quad 0 \leq i \leq I-1, \quad -J \leq j \leq J-1$$

On note $A_{i,j}$ le point de coordonnées (r_i, μ_j) .

A chaque intervalle $[\mu_j, \mu_{j+1}]$, $-J \leq j \leq J-1$, on associe le coefficient $\alpha_{j+\frac{1}{2}}$, compris entre 0 et 1, tel que :

$$(1.5) \quad \alpha_{j+\frac{1}{2}} = 1 - \alpha_{-j-\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq j \leq J-1.$$

On pose :

$$(1.6) \quad \mu_{j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+1} + (1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}}) \mu_j, \quad -J \leq j \leq J-1$$

$$(1.7) \quad r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{r_{i+1} + r_i}{2}, \quad 0 \leq i \leq I-1.$$

Sur chaque élément K_{ij} , le flux u est choisi de la forme

$a + br + cr^2 + \mu(\alpha + \beta r + \gamma r^2)$ et est déterminé par ses valeurs aux points

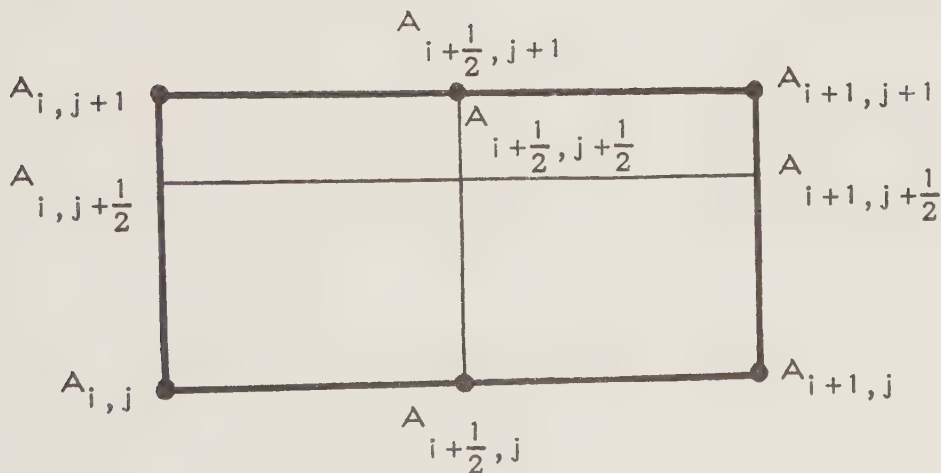
$A_{i,j+1}$, $A_{i,j}$, $A_{i+\frac{1}{2},j+1}$, $A_{i+\frac{1}{2},j}$, $A_{i+1,j+1}$, $A_{i+1,j}$.

Les relations suivantes sont satisfaites (figure 1.1).

$$(1.8) \quad \alpha_{j+\frac{1}{2}} u(A_{i,j+1}) + (1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}}) u(A_{i,j}) = u(A_{i,j+\frac{1}{2}})$$

$$(1.9) \quad \alpha_{j+\frac{1}{2}} u(A_{i+1,j+1}) + (1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}}) u(A_{i+1,j}) = u(A_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})$$

$$(1.10) \quad \alpha_{j+\frac{1}{2}} u(A_{i+\frac{1}{2},j+1}) + (1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}}) u(A_{i+\frac{1}{2},j}) = u(A_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})$$



(figure 1.1)

Soit V_h l'espace des fonctions v_h dont la restriction à chaque rectangle K_{ij} est un polynôme de $P_2(r) \times P_1(\mu)$, et v_h entièrement déterminée par ses valeurs aux points $A_{i,j+1}$, $A_{i+\frac{1}{2},j+1}$, $A_{i+1,j+1}$, $A_{i,j}$, $A_{i+\frac{1}{2},j}$, $A_{i+1,j}$, pour $0 \leq i \leq I-1$, $-J \leq j \leq J-1$.

La dimension de l'espace V_h est égale à $4IJ + 2(J+1) + 1$.

L'espace V_h construit de cette façon assure la continuité d'une maille à la voisine.

Par la suite, on utilise les notations suivantes : pour $v_h \in V_h$

$$v_h(A_{i,j}) = v_{i,j}, \quad , \quad 0 \leq i \leq I, \quad -J \leq j \leq J$$

$$v_h(A_{i+\frac{1}{2},j}) = v_{i+\frac{1}{2},j}, \quad , \quad 0 \leq i \leq I-1, \quad -J \leq j \leq J$$

$$v_h(A_{i,j+\frac{1}{2}}) = v_{i,j+\frac{1}{2}}, \quad , \quad 0 \leq i \leq I, \quad -J \leq j \leq J-1$$

$$v_h(A_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) = v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \quad , \quad 0 \leq i \leq I-1, \quad -J \leq j \leq J-1.$$

Un élément u_h de l'espace V_h s'écrit de la façon suivante :

$$(1.11) \quad u_h(r, \mu) = \frac{2(r-r_i)(r-r_{i+\frac{1}{2}})}{(r_{i+1}-r_i)^2(\mu_{j+1}-\mu_j)} ((\mu-\mu_j)u_{i+1,j+1} - (\mu-\mu_{j+1})u_{i+1,j}) \\ + \frac{2(r-r_{i+1})(r-r_{i+\frac{1}{2}})}{(r_{i+1}-r_i)^2(\mu_{j+1}-\mu_j)} ((\mu-\mu_j)u_{i,j+1} - (\mu-\mu_{j+1})u_{i,j}) \\ + \frac{4(r-r_i)(r-r_{i+1})}{(r_{i+1}-r_i)^2(\mu_{j+1}-\mu_j)} ((\mu-\mu_{j+1})u_{i+\frac{1}{2},j} - (\mu-\mu_j)u_{i+\frac{1}{2},j+1}).$$

Pour approcher le problème (0.1), (0.2) on pose le problème suivant :

trouver $u_h \in V_h$ telle que :

$$(1.12) \quad \int_{K_{ij}} (Au_h - r^2 S) \psi_h \, dr \, d\mu = 0, \quad \forall \psi_h \in P_1(r), \quad 0 \leq i \leq I-1, \\ -J \leq j \leq J-1$$

$$(1.13) \quad u_h(A_{I,j}) = 0, \quad -J+1 \leq j \leq 0.$$

Pour le calcul des intégrales définies par les relations (1.12), on utilise une formule de quadrature construite de la façon suivante :

$$(1.14) \quad \int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} g(\mu) \, d\mu \sim w_{j+\frac{1}{2}} g\left(\mu_{j+\frac{1}{2}}\right)$$

$$(1.15) \quad \int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r) \, dr \sim w_{i+\frac{1}{3}} f\left(r_{i+\frac{1}{3}}\right) + w_{i+\frac{2}{3}} f\left(r_{i+\frac{2}{3}}\right).$$

Les paramètres $w_{j+\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}, w_{i+\frac{1}{3}}, r_{i+\frac{1}{3}}, w_{i+\frac{2}{3}}, r_{i+\frac{2}{3}}$ sont à déterminer

de façon à avoir les propriétés de conservation 1 et 2 de façon discrète.

Pour des raisons de symétrie ([6]) on s'impose les relations :

$$(1.16) \quad w_{j+\frac{1}{2}} = w_{-j-\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq j \leq J-1.$$

On pose :

$$(1.17) \quad m_{\ell,h}(r) = \sum_{j=-J}^{J-1} w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}}^{\ell} u_h\left(r, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right).$$

Lemme 1.1 : Une condition suffisante pour que la propriété de conservation 1 soit satisfaite de façon discrète est que les relations suivantes soient vérifiées, définissant les scalaires γ_j :

$$(1.18) \quad \frac{w_{j+\frac{1}{2}}}{(\mu_{j+1} - \mu_j)} \left(1 + 2 \mu_{j+1} \mu_{j+\frac{1}{2}} - 3 \mu_{j+\frac{1}{2}}^2\right) = \\ \frac{w_{j-\frac{1}{2}}}{(\mu_j - \mu_{j-1})} \left(1 + 2 \mu_{j-1} \mu_{j-\frac{1}{2}} - 3 \mu_{j-\frac{1}{2}}^2\right) = \gamma_j,$$

pour $-J+1 \leq j \leq J-1$

$$(1.19) \quad 1 + 2 \mu_{J-1} \mu_{J-\frac{1}{2}} - 3 \mu_{J-\frac{1}{2}}^2 = 1 + 2 \mu_{-J+1} \mu_{-J+\frac{1}{2}} - 3 \mu_{-J+\frac{1}{2}}^2 = 0.$$

Démonstration : Considérons les relations (1.12) pour $\psi_h = 1$, en utilisant les formules de quadrature (1.14) et (1.15). Ces relations s'écrivent :

$$(1.20) \quad \begin{aligned} & w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} \left(r_{i+1}^2 u_{i+1, j+\frac{1}{2}} - r_i^2 u_{i, j+\frac{1}{2}} \right) \\ & + w_{i+\frac{1}{3}} w_{j+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u_h] \left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) \\ & + w_{i+\frac{2}{3}} w_{j+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u_h] \left(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) \\ & + w_{i+\frac{1}{3}} w_{j+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{3}}^2 \left(\sigma u_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}} - S \left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) \right) \\ & + w_{i+\frac{2}{3}} w_{j+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{2}{3}}^2 \left(\sigma u_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} - S \left(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) \right) = 0, \end{aligned}$$

pour $0 \leq i \leq l-1$, $-J \leq j \leq J-1$.

En sommant les relations (1.20), pour $-J \leq j \leq J-1$, il est clair que pour avoir la propriété de conservation 1 de façon discrète, on doit écrire :

$$(1.21) \quad \begin{aligned} & \sum_{j=-J}^{J-1} w_{j+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u_h] \left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) + \\ & \sum_{j=-J}^{J-1} w_{j+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u_h] \left(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) = 0, \end{aligned}$$

pour $0 \leq i \leq l-1$.

La relation (1.21) peut encore s'écrire :

$$(1.22) \sum_{j=-J}^{J-1} w_{j+\frac{1}{2}} \left[\left(1 - \mu_{j+\frac{1}{2}}^2\right) \frac{\partial u_h}{\partial \mu} \left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right) - 2 \mu_{j+\frac{1}{2}} u_h \left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right) \right] r_{i+\frac{1}{3}} +$$

$$r_{i+\frac{2}{3}} w_{j+\frac{1}{2}} \left[\left(1 - \mu_{j+\frac{1}{2}}^2\right) \frac{\partial u_h}{\partial \mu} \left(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right) - 2 \mu_{j+\frac{1}{2}} u_h \left(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right) \right] = 0,$$

pour $0 \leq i \leq I-1$.

Il est facile de voir que :

$$\frac{\partial u_h}{\partial \mu} \left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right) = \frac{(u_{i+\frac{1}{3}, j+1} - u_{i+\frac{1}{3}, j})}{\mu_{j+1} - \mu_j}$$

$$\frac{\partial u_h}{\partial \mu} \left(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right) = \frac{(u_{i+\frac{2}{3}, j+1} - u_{i+\frac{2}{3}, j})}{\mu_{j+1} - \mu_j}.$$

De plus :

$$u_h \left(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right) = \alpha_{j+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{2}{3}, j+1} + (1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}}) u_{i+\frac{2}{3}, j}$$

$$u_h \left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right) = \alpha_{j+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{3}, j+1} + (1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}}) u_{i+\frac{1}{3}, j}.$$

Les relations suivantes sont aussi vérifiées :

$$r_{i+\frac{1}{3}} u_{i+\frac{1}{3}, j+1} + r_{i+\frac{2}{3}} u_{i+\frac{2}{3}, j+1}$$

$$= \frac{r_{i+1}}{3} u_{i+1, j+1} + \frac{r_i}{3} u_{i, j+1} + \frac{2}{3} (r_{i+1} + r_i) u_{i+\frac{1}{2}, j+1}$$

$$r_{i+\frac{1}{3}} u_{i+\frac{1}{3}, j} + r_{i+\frac{2}{3}} u_{i+\frac{2}{3}, j}$$

$$= \frac{r_{i+1}}{3} u_{i+1, j} + \frac{r_i}{3} u_{i, j} + \frac{2}{3} (r_{i+1} + r_i) u_{i+\frac{1}{2}, j}.$$

Les relations (1.22) deviennent alors :

$$(1.23) \quad \sum_{j=-J}^{J-1} w_{j+\frac{1}{2}} \left\{ \left(\frac{(1-\mu^2)_{j+\frac{1}{2}}}{\mu_{j+1}-\mu_j} - 2\alpha_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ \left(\frac{r_{i+1}}{3} u_{i+1,j+1} + \frac{r_i}{3} u_{i,j+1} + \frac{2}{3} (r_{i+1} + r_i) u_{i+\frac{1}{2},j+1} \right) \\ + \left(-\frac{(1-\mu^2)_{j+\frac{1}{2}}}{\mu_{j+1}-\mu_j} - 2\mu_{j+\frac{1}{2}} \left(1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}} \right) \right) \\ \left. \left(\frac{r_{i+1}}{3} u_{i+1,j} + \frac{r_i}{3} u_{i,j} + \frac{2}{3} (r_{i+1} + r_i) u_{i+\frac{1}{2},j} \right) \right\} = 0, \\ \text{pour } 0 \leq i \leq l-1.$$

On pose :

$$\psi_j = \frac{r_{i+1}}{3} u_{i+1,j} + \frac{r_i}{3} u_{i,j} + \frac{2}{3} (r_{i+1} + r_i) u_{i+\frac{1}{2},j}.$$

Une condition suffisante pour avoir la propriété de conservation 1 de façon discrète est que la relation (1.23) soit satisfaite quel que soit ψ_j , pour $-J \leq j \leq J-1$.

On en déduit les égalités suivantes :

$$-w_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{(1-\mu^2)_{j+\frac{1}{2}}}{\mu_{j+1}-\mu_j} + 2\mu_{j+\frac{1}{2}} \left(1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}} \right) \right) \\ + w_{j-\frac{1}{2}} \left(\frac{(1-\mu^2)_{j-\frac{1}{2}}}{\mu_j-\mu_{j-1}} - 2\alpha_{j-\frac{1}{2}} \mu_{j-\frac{1}{2}} \right) = 0$$

pour $-J+1 \leq j \leq J-1$

et :

$$\left(1 - \mu_{J-\frac{1}{2}}^2\right) - 2\alpha_{J-\frac{1}{2}} \mu_{J-\frac{1}{2}} (\mu_J - \mu_{J-1}) = 0$$

$$\left(1 - \mu_{-J+\frac{1}{2}}^2\right) + 2\left(1 - \alpha_{-J+\frac{1}{2}}\right) (\mu_{-J+1} - \mu_{-J}) \mu_{-J+\frac{1}{2}} = 0.$$

En remplaçant $\alpha_{j+\frac{1}{2}}$ par sa valeur $\frac{\mu_{j+\frac{1}{2}} - \mu_j}{\mu_{j+1} - \mu_j}$, μ_j par 1 et μ_{-j} par -1,

on obtient les relations données par le lemme 1.1.

Compte tenu des relations (1.3) et (1.16), il est suffisant d'avoir les égalités (1.18) et (1.19) pour les valeurs positives de j .

Remarque 1.1 : Une conséquence du lemme 1.1 est le résultat suivant :

$$(1.24) \quad \gamma_{j+1} - \gamma_j = -2\mu_{j+\frac{1}{2}} \omega_{j+\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq j \leq J-1,$$

$$(1.25) \quad \omega_{j+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u_h(r, \mu)](r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}) \\ = \gamma_{j+1} u_h(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+1}) - \gamma_j u_h(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_j),$$

pour $0 \leq j \leq J-1$, $0 \leq i \leq I-1$

$$(1.26) \quad \omega_{j+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u_h(r, \mu)](r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}) \\ = \gamma_{j+1} u_h(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+1}) - \gamma_j u_h(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_j),$$

pour $0 \leq j \leq J-1$, $0 \leq i \leq I-1$.

Pour avoir la propriété de conservation 2 de façon discrète, deux choix sont possibles :

Un premier choix qui consiste à utiliser une formule de quadrature sans poids définie par :

$$(1.27) \quad w_{i+\frac{1}{3}} = w_{i+\frac{2}{3}} = \frac{r_{i+1} - r_i}{2}, \quad 0 \leq i \leq l-1$$

$$(1.28) \quad r_{i+\frac{1}{3}} = \frac{r_{i+1} + r_i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} (r_{i+1} - r_i), \quad 0 \leq i \leq l-1$$

$$(1.29) \quad r_{i+\frac{2}{3}} = \frac{r_{i+1} + r_i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} (r_{i+1} - r_i), \quad 0 \leq i \leq l-1.$$

Un second choix consiste à prendre une formule de quadrature avec poids définie par :

$$(1.30) \quad w_{i+\frac{1}{3}} = (r_{i+1} - r_i) \left[\frac{(r_{i+1} + r_i)}{4} - \frac{(r_{i+1}^3 + 6r_{i+1}^2 r_i - 6r_{i+1} r_i^2 - r_i^3)}{6\sqrt{6}\sqrt{H}} \right]$$

$$(1.31) \quad w_{i+\frac{2}{3}} = (r_{i+1} - r_i) \left[\frac{(r_{i+1} + r_i)}{4} + \frac{(r_{i+1}^3 + 6r_{i+1}^2 r_i - 6r_{i+1} r_i^2 - r_i^3)}{6\sqrt{6}\sqrt{H}} \right]$$

$$(1.32) \quad r_{i+\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} \frac{(r_{i+1}^3 + r_i^3 + 4r_{i+1}^2 r_i + 4r_{i+1} r_i^2)}{r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1}} - \frac{\sqrt{6} (r_{i+1} - r_i) \sqrt{H}}{10 (r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})}$$

$$(1.33) \quad r_{i+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \frac{(r_{i+1}^3 + r_i^3 + 4r_{i+1}^2 r_i + 4r_{i+1} r_i^2)}{r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1}} + \frac{\sqrt{6} (r_{i+1} - r_i) \sqrt{H}}{10 (r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})}$$

avec :

$$H = r_{i+1}^4 + r_i^4 + 10r_i^3 r_{i+1} + 10r_{i+1}^3 r_i + 28r_{i+1}^2 r_i^2.$$

En effet, pour les deux choix, la relation suivante est vérifiée.

$$(1.34) \quad \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_h) dr = w_{i+\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_h) (r_{i+\frac{1}{3}}) + w_{i+\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_h) (r_{i+\frac{2}{3}})$$

$$= r_{i+1}^2 u_{i+1} - r_i^2 u_i \quad \forall u_h \in P_2.$$

Lemme 1.2 : Supposons que les relations (1.18), (1.19), (1.27), (1.28) et (1.29) soient vérifiées. Alors les équations (1.12) s'écrivent :

$$(1.35) \quad w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} \left(r_{i+1}^2 u_{i+1, j+\frac{1}{2}} - r_i^2 u_{i, j+\frac{1}{2}} \right)$$

$$+ w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}} \left(\gamma_{j+1} u_{i+\frac{1}{3}, j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{1}{3}, j} \right)$$

$$+ w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}} \left(\gamma_{j+1} u_{i+\frac{2}{3}, j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{2}{3}, j} \right)$$

$$+ w_{j+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^2 \left(\sigma u_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}} - s_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}} \right)$$

$$+ w_{j+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^2 \left(\sigma u_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} - s_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} \right) = 0,$$

pour $0 \leq i \leq I-1, \quad -J \leq j \leq J-1$

$$(1.36) \quad w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(51r_{i+1}^3 + 7r_{i+1}^2 r_i + 3r_{i+1} r_i^2 - r_i^3)}{60} u_{i+1, j+\frac{1}{2}} \right.$$

$$+ \frac{(r_{i+1}^3 - 7r_{i+1} r_i^2 - 3r_{i+1}^2 r_i - 51r_i^3)}{60} u_{i, j+\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{(-3r_{i+1}^3 - r_{i+1}^2 r_i + r_{i+1} r_i^2 + 3r_i^3)}{15} u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \left. \right\}$$

$$+ \frac{(9r_{i+1}^3 - 7r_{i+1}^2 r_i - 3r_{i+1} r_i^2 + r_i^3)}{60} (\gamma_{j+1} u_{i+1, j+1} - \gamma_j u_{i+1, j})$$

$$+ \frac{(-r_{i+1}^3 + 3r_{i+1}^2 r_i + 7r_{i+1} r_i^2 - 9r_i^3)}{60} (\gamma_{j+1} u_{i, j+1} - \gamma_j u_{i, j})$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(3r_{i+1}^3 + r_{i+1}^2 r_i - r_i^2 r_{i+1} - 3r_i^3)}{15} (\gamma_{j+1} u_{i+\frac{1}{2}, j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{1}{2}, j}) \\
 & + w_{j+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^3 (\sigma u_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}} - S_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}) \\
 & + w_{j+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^3 (\sigma u_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} - S_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}}) = 0
 \end{aligned}$$

pour $0 \leq i \leq I-1$, $-J \leq j \leq J-1$.

Démonstration : Les équations (1.35) sont immédiates ; en effet, il suffit de considérer les relations (1.12) pour $\psi_h = 1$, et d'utiliser les égalités (1.34), (1.25) et (1.26).

Pour avoir les équations (1.36), on écrit les relations (1.12) pour $\psi_h = r$, on obtient :

$$(1.37) \quad \int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} (\mu r \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_h) + r^2 \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u_h] + r^3 (\sigma u_h - S)) dr d\mu = 0.$$

Pour le calcul des termes $\int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} (\mu r \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_h)) dr d\mu$ et

$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} r^2 \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u_h] dr d\mu$, on utilise la formule de quadrature (1.14),

et on intègre exactement par rapport à la variable r (puisque les polynômes qu'on doit intégrer sont de degré 4 en r) pour avoir des expressions explicites, il est nécessaire d'utiliser l'expression de u_h donnée par la relation (1.11).

Le terme $\int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} r^3 (\sigma u_h - S) dr d\mu$ se calcule de façon approchée par

les formules (1.14) et (1.15).

Ce qui achève la démonstration du lemme 1.2.

Lemme 1.3 : Supposons que les relations (1.18), (1.19), (1.30), (1.31), (1.32) et (1.33) soient vérifiées. Alors les équations (1.12) s'écrivent :

$$(1.38) \quad w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} (r_{i+1}^2 u_{i+1, j+\frac{1}{2}} - r_i^2 u_{i, j+\frac{1}{2}}) +$$

$$\begin{aligned}
 & + w_{i+\frac{1}{3}} \left(\gamma_{j+1} u_{i+\frac{1}{3}, j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{1}{3}, j} \right) \\
 & + w_{i+\frac{2}{3}} \left(\gamma_{j+1} u_{i+\frac{2}{3}, j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{2}{3}, j} \right) \\
 & + w_{j+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}} \left(\sigma u_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}} - S_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}} \right) \\
 & + w_{j+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}} \left(\sigma u_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} - S_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

pour $0 \leq i \leq I-1, \quad -J \leq j \leq J-1$

$$\begin{aligned}
 (1.39) \quad & w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(51r_{i+1}^3 + 7r_{i+1}^2 r_i + 3r_{i+1} r_i^2 - r_i^3)}{60} u_{i+1, j+\frac{1}{2}} \right. \\
 & + \frac{(r_{i+1}^3 - 7r_{i+1} r_i^2 - 3r_{i+1}^2 r_i - 51r_i^3)}{60} u_{i, j+\frac{1}{2}} \\
 & + \frac{(-3r_{i+1}^3 - r_{i+1}^2 r_i + r_{i+1} r_i^2 + 3r_i^3)}{15} u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \left. \right\} \\
 & + \frac{(9r_{i+1}^3 - 7r_{i+1}^2 r_i - 3r_{i+1} r_i^2 + r_i^3)}{60} (\gamma_{j+1} u_{i+1, j+1} - \gamma_j u_{i+1, j}) \\
 & + \frac{(-r_{i+1}^3 + 3r_{i+1}^2 r_i + 7r_{i+1} r_i^2 - 9r_i^3)}{60} (\gamma_{j+1} u_{i, j+1} - \gamma_j u_{i, j}) \\
 & + \frac{(3r_{i+1}^3 + r_{i+1}^2 r_i - r_{i+1} r_i^2 - 3r_i^3)}{15} (\gamma_{j+1} u_{i+\frac{1}{2}, j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{1}{2}, j}) \\
 & + w_{j+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^2 \left(\sigma u_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}} - S_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}} \right) \\
 & + w_{j+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^2 \left(\sigma u_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} - S_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

pour $0 \leq i \leq I-1, \quad -J \leq j \leq J-1.$

La démonstration de ce lemme est la même que celle du lemme 1.2 sauf que dans ce cas approcher par la formule de quadrature (1.15) ou intégrer exactement par rapport à r revient au même, puisque le choix des paramètres définis par (1.30), (1.31), (1.32) et (1.33) permet d'avoir une exactitude de la formule de quadrature pour les monômes r , r^2 , r^3 , r^4 .

Remarque 1.2 : La valeur de $\mu_{J-\frac{1}{2}}$ est connue par résolution de l'équation

(1.19). Pour connaître les valeurs de $\mu_{j+\frac{1}{2}}$, pour $0 \leq j \leq J-2$, et des poids

$\omega_{j+\frac{1}{2}}$, pour $0 \leq j \leq J-1$, on ne dispose que de $J-1$ équations (les relations

(1.18)). Il faut donc se donner J relations supplémentaires.

Dans tout ce qui va suivre, on suppose que :

$$(1.40) \quad \gamma_j = 1 - \mu_j^2, \quad 0 \leq j \leq J$$

ce qui entraîne :

$$(1.41) \quad 3\mu_{j+\frac{1}{2}}^2 (\mu_{j+1} + \mu_j) + 2\mu_{j+\frac{1}{2}} \left(1 - (\mu_j^2 + \mu_{j+1}^2 + \mu_j \mu_{j+1}) \right) - (\mu_{j+1} + \mu_j) = 0,$$

pour $0 \leq j \leq J-1$.

Dans [10], on montre que pour ce choix, la formule de quadrature (1.14) est exacte pour les polynômes μ et $1 - 3\mu^2$, et on montre aussi qu'il existe une constante C positive indépendante de μ_j telle que :

$$(1.42) \quad 0 < \mu_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (\mu_{j+1} + \mu_j) < C \mu_{j+\frac{1}{2}} (\mu_{j+1} - \mu_j)^2,$$

pour $0 \leq j \leq J-1$.

Remarque 1.3 : La dimension de l'espace V_h est égale à $4IJ + 2J + 2I + 1$.

Pour calculer la solution $u_h \in V_h$, on dispose de $4IJ$ équations provenant de la discrétisation de l'équation (0.1), de $2I+1$ équations données par la discrétisation de l'équation particulière, de J conditions aux limites qui sont :

$$u_{I,j} = 0, \quad \text{pour} \quad -J+1 \leq j \leq 0.$$

Pour faire une résolution qui suit le cheminement décrit au chapitre 0, il est nécessaire de connaître les valeurs de u_h aux points de coordonnées $(0, \mu_j)$, $1 \leq j \leq J$; pour cela, on utilise la relation de symétrie $(u(0, \mu) = u(0, -\mu)$, pour $-1 \leq \mu \leq +1$), et on écrit :

$$(1.43) \quad u_{0,j} = u_{0,-j}, \quad 1 \leq j \leq J$$

et de connaître aussi la solution approchée u_h dans le domaine $[0, R] \times [-1, 0]$, pour cela on pose :

$$(1.44) \quad u_{i,-J} = \varphi_i, \quad 0 \leq i \leq I$$

$$(1.45) \quad u_{i+\frac{1}{2},-J} = \varphi_{i+\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq i \leq I-1$$

avec $\varphi_i = \varphi_h(r_i)$, $\varphi_{i+\frac{1}{2}} = \varphi_h(r_{i+\frac{1}{2}})$, φ_h étant la solution approchée de l'équation particulière.

En résumé, pour faire le calcul de la solution approchée $u_h \in V_h$, on procède de la manière suivante :

Schéma II.1 : La solution $u_h \in V_h$, approchant la solution u du problème (0.1), (0.2) est calculée en résolvant les équations du schéma I.1 (voir chapitre I), et les équations (1.44), (1.45), (1.35), (1.36), (1.13), (1.43). Les quantités $\gamma_j, w_{j+\frac{1}{2}}$ et $\mu_{j+\frac{1}{2}}$ (resp. $w_{i+\frac{1}{3}}, w_{i+\frac{2}{3}}, r_{i+\frac{1}{3}}, r_{i+\frac{2}{3}}$) sont déterminées par les relations (1.18), (1.40) et (1.41) (resp. (1.27), (1.28) et (1.29)).

Les calculs sont effectués rectangle par rectangle en suivant le cheminement décrit au chapitre 0.

Schéma II.2 : La solution $u_h \in V_h$, approchant la solution u du problème (0.1), (0.2), est calculée en résolvant les équations du schéma I.2 (voir chapitre I), et les équations (1.44), (1.45), (1.38), (1.39), (1.13), (1.43). Les quantités $\gamma_j, w_{j+\frac{1}{2}}$ et $\mu_{j+\frac{1}{2}}$ (resp. $w_{i+\frac{1}{3}}, w_{i+\frac{2}{3}}, r_{i+\frac{1}{3}}, r_{i+\frac{2}{3}}$) sont déterminées par les relations (1.18), (1.40) et (1.41) (resp. (1.30), (1.31), (1.32), (1.33)).

Le sens de la résolution de ce schéma est le même que celui du schéma II.1.

Remarque 1.4 : Le schéma II.1 est peu voisin du schéma II.2 (seul le calcul des termes non dérivés diffère d'un schéma à l'autre), c'est la raison pour laquelle on ne s'intéressera par la suite qu'à l'étude de la stabilité du schéma II.2.

Une autre façon d'écrire les équations (1.12), c'est d'approcher par les formules de quadrature (1.15) et (1.14) ; dans ce cas, l'équation (1.35) reste inchangée ; par contre, l'équation (1.36) va être remplacée par :

$$(1.46) \quad \left[w w \left(\mu r \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_h) + r^2 \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u_h] + r^3 (\sigma u_h - S) \right) \right]_{r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}} = 0$$

ce qui peut aussi s'écrire de la façon suivante :

$$(1.47) \quad \begin{aligned} & w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(29 r_{i+1}^3 + 9 r_{i+1}^2 r_i - 3 r_{i+1} r_i^2 + r_i^3)}{36} u_{i+1, j+\frac{1}{2}} \right. \\ & + \frac{(-r_{i+1}^3 + 3 r_{i+1}^2 r_i - 9 r_{i+1} r_i^2 - 29 r_i^3)}{36} u_{i, j+\frac{1}{2}} \\ & + \left. \frac{(-r_{i+1}^3 - 3 r_{i+1}^2 r_i + 3 r_{i+1} r_i^2 + r_i^3)}{9} u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right\} \\ & + w_{i+\frac{1}{3}} r_{i+\frac{1}{3}}^2 \left(\gamma_{j+1} u_{i+\frac{1}{3}, j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{1}{3}, j} \right) \\ & + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^2 \left(\gamma_{j+1} u_{i+\frac{2}{3}, j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{1}{3}, j} \right) \\ & + \left[w w r^3 (\sigma u_h - S) \right]_{r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}} = 0, \end{aligned}$$

pour $0 \leq i \leq I-1, \quad -J \leq j \leq J-1.$

Schéma II, 3 (collocation - Gauss) : La solution $u_h \in V_h$, approchant la
solution u du problème (0.1), (0.2), est calculée en résolvant les équations
du schéma I, 3, et les équations (1.44), (1.45), (1.35), (1.47), (1.43), (1.13),
les paramètres qui figurent dans l'écriture de ce schéma, sont les mêmes que
ceux du schéma II, 1.

Le schéma I, 3 ne figure pas au chapitre I, il se constitue des équations (1.17),
(1.19) (voir chapitre I) et d'une autre équation qui est donnée par :

$$\begin{aligned}
 (1.48) \quad & \frac{(-19r_{i+1}^3 + r_i^3 - 15r_{i+1}^2 r_i - 3r_{i+1} r_i^2)}{36} \varphi_{i+1} + \\
 & \frac{(-r_{i+1}^3 + 3r_{i+1}^2 r_i + 15r_i^2 r_{i+1} + 19r_i^3)}{36} \varphi_i + \\
 & \frac{(5r_{i+1}^3 - 5r_i^3 - 3r_i^2 r_{i+1} + 3r_{i+1}^2 r_i)}{9} \varphi_{i+\frac{1}{2}} + \\
 & \sigma \frac{(r_{i+1} - r_i)}{2} \left\{ \frac{(-r_{i+1}^3 + 4r_i^3 + 3r_i^2 r_{i+1})}{36} \varphi_i + \right. \\
 & \frac{(4r_{i+1}^3 + 3r_{i+1}^2 r_i - r_i^3)}{36} \varphi_{i+1} + \\
 & \left. \frac{(r_{i+1}^3 + r_i^3 + r_{i+1}^2 r_i + r_i^2 r_{i+1})}{3} \varphi_{i+\frac{1}{2}} \right\} - \\
 & \frac{(r_{i+1} - r_i)}{2} \left(r_{i+\frac{1}{3}}^3 s_{i+\frac{1}{3}} + r_{i+\frac{2}{3}}^3 s_{i+\frac{2}{3}} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

pour $0 \leq i \leq l-1$.

II.2 - Etude de la stabilité

Dans ce paragraphe, on se propose d'étudier la stabilité des schémas numériques introduits au paragraphe précédent. Cette étude fait intervenir, pour chaque type de schéma, des normes discrètes avec poids $\|\cdot\|_{\gamma, s, h}$, qu'on définit par la suite comme étant l'analogue discret des normes $\|\cdot\|_{\gamma, s}$ définies par :

$$(2.1) \quad \|v\|_{\gamma, s} = \left(\int_{-1}^{+1} \int_0^R r^\gamma (1 - \mu^2)^{-s} v^2 dr d\mu \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{pour } 0 \leq \gamma \leq 2, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Pour les démonstrations, on procède comme dans [10], c'est-à-dire qu'on considère séparément les relations (1.12), pour $0 \leq i \leq I-1$, $-J \leq j \leq -1$, puis pour $0 \leq i \leq I-1$, $0 \leq j \leq J-1$.

II.2.1 - Stabilité du schéma II.2 :

Pour ce schéma numérique, on définit, pour toute fonction v continue sur chaque rectangle K_{ij} , les normes discrètes suivantes :

$$(2.2) \quad \|v\|_{\gamma, s, h}^- = \left(\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-J}^{-1} \left\{ w_{i+\frac{1}{3}} w_{j+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{3}}^{\gamma-1} \left(1 - \mu_{j+\frac{1}{2}}^2 \right)^{-s} v_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^2 + w_{i+\frac{2}{3}} w_{j+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{2}{3}}^{\gamma-1} \left(1 - \mu_{j+\frac{1}{2}}^2 \right)^{-s} v_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}}^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$(2.3) \quad \|v\|_{\gamma, s, h}^+ = \left(\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{ w_{i+\frac{1}{3}} w_{j+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{3}}^{\gamma-1} \left(1 - \mu_{j+\frac{1}{2}}^2 \right)^{-s} v_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^2 + w_{i+\frac{2}{3}} r_{i+\frac{2}{3}}^{\gamma-1} \left(1 - \mu_{j+\frac{1}{2}}^2 \right)^{-s} w_{j+\frac{1}{2}} v_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}}^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(2.4) \quad \|v\|_{Y,s,h} = \left((\|v\|_{Y,s,h}^+)^2 + (\|v\|_{Y,s,h}^-)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Les paramètres $w_{i+\frac{1}{3}}, w_{i+\frac{2}{3}}, r_{i+\frac{1}{3}}, r_{i+\frac{2}{3}}$ sont donnés par (1.30), (1.31), (1.32) et (1.33).

Les résultats suivants vont être très utiles pour les démonstrations de majorations de stabilité.

Lemme 2.1 : On suppose que $-J \leq j \leq -1$. On a :

$$(2.5) \quad \prod_{j=-J+1}^{-1} \frac{\frac{3}{2} - 2\alpha_{j+\frac{1}{2}}}{2\alpha_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}} \leq C$$

où C est une constante indépendante de $\Delta\mu$.

Lemme 2.2 : On suppose que $\mu_{j+1} - \mu_j = \Delta\mu = \frac{1}{J}$, $-J \leq j \leq -1$. On a :

$$(2.6) \quad \left(\gamma_{j+1} v_{j+1} - \gamma_j v_j + w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} \right) v_{j+\frac{1}{2}} \geq$$

$$c_{j+\frac{1}{2}} \left(\left(2\alpha_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \right) v_{j+1}^2 - \left(\frac{3}{2} - 2\alpha_{j+\frac{1}{2}} \right) v_j^2 \right)$$

$$\text{où } v_{j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}} v_{j+1} + \left(1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}} \right) v_j$$

$$(2.7) \quad c_{j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}} \gamma_j + \left(1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}} \right) \gamma_{j+1}.$$

Lemme 2.3 : On suppose que $\mu_{j+1} - \mu_j = \Delta\mu = \frac{1}{J}$, pour tout couple de scalaires (v_j, v_{j+1}) , $0 \leq j \leq J-1$. On a :

$$(2.8) \quad 2 \left(\gamma_{j+1} v_{j+1} - \gamma_j v_j + w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} \right) v_{j+\frac{1}{2}} \geq \gamma_{j+1} v_{j+1}^2 - \gamma_j v_j^2.$$

Pour la démonstration de ces trois derniers lemmes, on renvoie à [10] (chapitre IV, page 195 à 203).

Lemme 2.4 : On suppose que $r_{i+1} - r_i = \Delta r$, $\mu_{j+1} - \mu_j = \Delta \mu = \frac{1}{J}$.

Soit $u_h \in V_h$ la solution des équations du schéma II.2, pour $-J \leq j \leq -1$.

On a les majorations : pour $0 \leq s \leq 1$:

$$\begin{aligned}
 (2.9) \quad & \max_{1 \leq i \leq l-1} \left\{ \sum_{j=-J}^{-1} \left(\omega |\mu| (1 - \mu^2)^{-s} \right)_{j+\frac{1}{2}} r_i^\gamma u_{i,j+\frac{1}{2}}^2 \right\} \\
 & + \sum_{j=-J}^{-1} \left(\omega |\mu| (1 - \mu^2)^{-s} \right)_{j+\frac{1}{2}} \Delta r^\gamma u_{0,j+\frac{1}{2}}^2 \\
 & + \max_{-J+1 \leq j \leq 0} \left\{ \sum_{i=0}^{l-1} \left(\Delta r r^\gamma - 1 \right)_{i+\frac{1}{3}} (1 - \mu_j^2)^{1-s} u_{i+\frac{1}{3},j}^2 \right\} \\
 & + \max_{-J+1 \leq j \leq 0} \left\{ \sum_{i=0}^{l-1} \left(\Delta r r^\gamma - 1 \right)_{i+\frac{2}{3}} (1 - \mu_j^2)^{1-s} u_{i+\frac{2}{3},j}^2 \right\} \\
 & + \left(\|u_h\|_{\gamma,s,h}^- \right)^2 \leq \\
 & C \left\{ \begin{aligned} & \Delta \mu^{s-1} \left(\|S\|_{\gamma,s,h}^- \right)^2 + \sum_{i=0}^{l-1} \left(\Delta r r^\gamma - 1 \right)_{i+\frac{1}{3}} u_{i+\frac{1}{3},-J}^2 \\ & + \sum_{i=0}^{l-1} \left(\Delta r r^\gamma - 1 \right)_{i+\frac{2}{3}} u_{i+\frac{2}{3},-J}^2, \quad \text{pour } \gamma \geq \frac{5}{6} \\ & \Delta r^{\gamma-\frac{5}{6}} \left(\Delta \mu^{s-1} \left(\|S\|_{\gamma,s,h}^- \right)^2 + \sum_{i=0}^{l-1} \Delta r r^{\gamma-1} u_{i+\frac{1}{3},-J}^2 \right. \\ & \left. + \sum_{i=0}^{l-1} \Delta r r^{\gamma-1} u_{i+\frac{2}{3},-J}^2 \right), \quad \text{pour } 0 \leq \gamma < \frac{5}{6} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

où C est une constante positive indépendante de Δr et $\Delta \mu$.

Démonstration : Considérons les relations suivantes, pour $0 \leq i \leq l-1$, $-J \leq j \leq -1$.

$$(2.10) \quad \int_{K_{ij}} \left(\mu r^2 \frac{\partial u_h}{\partial r} + r(1 - \mu^2) \frac{\partial u_h}{\partial \mu} + r^2 (\sigma u_h - S) \right) \psi_h(r) dr d\mu = 0, \quad \forall \psi_h \in P_1.$$

Les relations (2.10) peuvent encore s'écrire :

$$(2.11) \quad \left([w\omega(\mu^2 \frac{\partial u_h}{\partial r} + (1-\mu^2) \frac{\partial u_h}{\partial \mu} + r(\sigma u_h - S))] \psi_h(r) \right)_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} = 0$$

$$\forall \psi_h \in P_1.$$

Dans les relations (2.11), en remplaçant ψ_h successivement par $\frac{r - r_{i+\frac{1}{3}}}{r_{i+\frac{2}{3}} - r_{i+\frac{1}{3}}}$, puis par $\frac{r - r_{i+\frac{2}{3}}}{r_{i+\frac{1}{3}} - r_{i+\frac{2}{3}}}$, on obtient une première équation qui est :

$$[w\omega(\mu^2 \frac{\partial u_h}{\partial r} + (1-\mu^2) \frac{\partial u_h}{\partial \mu} + r(\sigma u_h - S))] (r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}) = 0,$$

puis une seconde équation qui est :

$$[w\omega(\mu^2 \frac{\partial u_h}{\partial r} + (1-\mu^2) \frac{\partial u_h}{\partial \mu} + r(\sigma u_h - S))] (r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}) = 0.$$

En multipliant chacune de ces deux équations respectivement par

$$\left(\frac{u_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}}{r_{i+\frac{1}{3}}} \right), \left(\frac{u_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}}}{r_{i+\frac{2}{3}}} \right), \text{ et en faisant la somme, on a :}$$

$$(2.12) \quad \left(w\omega\mu \frac{\partial u_h}{\partial r} u_h \right)_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} + \left(\frac{w}{r} \right)_{i+\frac{1}{3}} \left[\left(\omega(1-\mu^2) \frac{\partial u_h}{\partial \mu} u_h \right)_{j+\frac{1}{2}} \left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) \right]$$

$$+ \left(\frac{w}{r} \right)_{i+\frac{2}{3}} \left[\left(\omega(1-\mu^2) \frac{\partial u_h}{\partial \mu} u_h \right)_{j+\frac{1}{2}} \left(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) \right]$$

$$+ [w\omega(\sigma u_h - S) u_h]_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} = 0.$$

Une façon d'écrire le terme $\left(w\omega\mu \frac{\partial u_h}{\partial r} u_h \right)_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}}$ est la suivante :

$$\left(w \mu \frac{\partial u_h}{\partial r} u_h \right)_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} = w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r \left(\frac{\partial u_h}{\partial r} u_h \right) (r, \mu_{j+\frac{1}{2}}) dr$$

et :

$$\begin{aligned} & w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r \left(\frac{\partial u_h}{\partial r} u_h \right) (r, \mu_{j+\frac{1}{2}}) dr \\ &= w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (r u_h^2) - \frac{u_h^2}{2} \right) (r, \mu_{j+\frac{1}{2}}) dr \\ (2.13) \quad &= (w |\mu|_{j+\frac{1}{2}}) \left(\frac{1}{2} r_i u_{i,j+\frac{1}{2}}^2 - \frac{1}{2} r_{i+1} u_{i+1,j+\frac{1}{2}}^2 + \frac{\Delta r}{15} u_{i,j+\frac{1}{2}}^2 \right. \\ &+ \frac{\Delta r}{15} u_{i+1,j+\frac{1}{2}}^2 + \frac{4}{15} \Delta r u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^2 - \frac{\Delta r}{30} u_{i,j+\frac{1}{2}} u_{i+1,j+\frac{1}{2}} \\ &\left. + \frac{\Delta r}{15} u_{i+1,j+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta r}{15} u_{i,j+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

En utilisant des techniques déjà vues au chapitre I, on montre que l'expression (2.13) peut être minorée par :

$$\begin{aligned} (2.14) \quad & \left(w_{j+\frac{1}{2}} |\mu|_{j+\frac{1}{2}} \right) \left\{ \frac{r_i(27+2\epsilon) + r_{i+1}(3-2\epsilon)}{60} u_{i,j+\frac{1}{2}}^2 \right. \\ & \left. - \frac{(r_{i+1}(27+2\epsilon) + r_i(3-2\epsilon))}{60} u_{i+1,j+\frac{1}{2}}^2 + \frac{(4-\frac{1}{\epsilon})}{15} \Delta r u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^2 \right\} \\ & \text{avec } \epsilon \geq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Le terme $\left(\frac{w}{r} \right)_{i+\frac{1}{3}} \left[\left(w (1-\mu^2) \frac{\partial u_h}{\partial \mu} u_h \right)_{j+\frac{1}{2}} \left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) \right]$ peut se mettre sous

la forme :

$$(2.15) \quad \left(\frac{w}{r} \right)_{i+\frac{1}{3}} \left(\gamma_{j+1} u_{i+\frac{1}{3},j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{1}{3},j} + 2 w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{3},j+\frac{1}{2}} \right) u_{i+\frac{1}{3},j+\frac{1}{2}}.$$

Grâce au lemme 2.2, l'expression (2.15) peut être minorée par :

$$(2.16) \quad \left(\frac{w}{r}\right)_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}} \left(\left(2\alpha_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right) u_{i+\frac{1}{3}, j+1}^2 - \left(\frac{3}{2} - 2\alpha_{j+\frac{1}{2}}\right) u_{i+\frac{1}{3}, j}^2 \right).$$

En faisant le même raisonnement, on montre que le terme :

$$\left(\frac{w}{r}\right)_{i+\frac{2}{3}} \left[\left(w(1-\mu^2) \right)_{j+\frac{1}{2}} \frac{\partial u_h}{\partial \mu} (r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}) \right] \text{ se minore par :}$$

$$(2.17) \quad \left(\frac{w}{r}\right)_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} \left(\left(2\alpha_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right) u_{i+\frac{2}{3}, j+1}^2 - \left(\frac{3}{2} - 2\alpha_{j+\frac{1}{2}}\right) u_{i+\frac{2}{3}, j}^2 \right),$$

où $c_{j+\frac{1}{2}}$ est donné par (2.7).

Finalement la relation (2.12) devient :

$$(2.18) \quad \begin{aligned} & \left(w | \mu | \right)_{j+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\left((27+2\epsilon)r_i + (3-2\epsilon)r_{i+1} \right)}{60 \cdot r_i^\gamma} r_i^\gamma u_{i, j+\frac{1}{2}}^2 \right. \\ & - \frac{\left((27+2\epsilon)r_{i+1} + (3-2\epsilon)r_i \right)}{60 \cdot r_{i+1}^\gamma} r_{i+1}^\gamma u_{i+1, j+\frac{1}{2}}^2 \\ & + \frac{\left(4 - \frac{1}{\epsilon} \right)}{15} \Delta r u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^2 \left. \right\} \\ & + c_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{w}{r}\right)_{i+\frac{1}{3}} \left(\left(2\alpha_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right) u_{i+\frac{1}{3}, j+1}^2 - \left(\frac{3}{2} - 2\alpha_{j+\frac{1}{2}}\right) u_{i+\frac{1}{3}, j}^2 \right) \\ & + c_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{w}{r}\right)_{i+\frac{2}{3}} \left(\left(2\alpha_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right) u_{i+\frac{2}{3}, j+1}^2 - \left(\frac{3}{2} - 2\alpha_{j+\frac{1}{2}}\right) u_{i+\frac{2}{3}, j}^2 \right) \\ & + [w w(\sigma u_h - S) u_h]_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} \leq 0. \end{aligned}$$

En multipliant la relation (2.18) par $\left(c_{j+\frac{1}{2}}\right)^{-S}$, il vient :

$$\begin{aligned}
 (2.19) \quad & \left[w |\mu| c^{-s} \left(r_i^\gamma u_i^2 - a_i^\epsilon r_{i+1}^\gamma u_{i+1}^2 + \frac{(4 - \frac{1}{\epsilon})}{15} \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \frac{\Delta r \times r_i^\gamma \times 60}{(27 + 2\epsilon)r_i + (3 - 2\epsilon)r_{i+1}} u_{i+\frac{1}{2}}^2 \right) \right]_{j+\frac{1}{2}} \\
 & + \left[\Delta r r^\gamma - 1 \left(\frac{c^{1-s}}{\gamma_{j+1}^{1-s}} \left(2\alpha - \frac{1}{2} \right) \gamma_{j+1}^{1-s} u_{j+1}^2 - \frac{c^{1-s}}{\gamma_j^{1-s}} \left(\frac{3}{2} - 2\alpha \right) \gamma_j^{1-s} u_j^2 \right) \right]_{i+\frac{1}{3}}^{i+\frac{2}{3}} \\
 & + \left[w r^\gamma - 1 c^{-s} (\sigma u_h - s) u_h \right]_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} \leq 0
 \end{aligned}$$

où :

$$a_i^\epsilon = \frac{(27 + 2\epsilon)r_{i+1} + (3 - 2\epsilon)r_i}{(27 + 2\epsilon)r_i + (3 - 2\epsilon)r_{i+1}} \left(\frac{r_i}{r_{i+1}} \right)^\gamma.$$

D'autre part, on a, d'après les relations (1.40) :

$$(2.20) \quad \prod_{j=-J+1}^0 \frac{\gamma_j}{\gamma_{j+1}} \leq c \Delta \mu^{-1}.$$

En sommant l'inégalité (2.19) sur les indices i , $0 \leq i \leq l-1$, et j , $-J \leq j \leq -1$, et en utilisant le lemme 2.7 (voir chapitre I), le lemme 2.1 et l'inégalité (2.20), on obtient le lemme 2.4.

Remarque 2.1 : Le schéma II.2 est stable pour la norme $\| \cdot \|_{Y,s,h}^-$ pour $\gamma \geq \frac{5}{6}$ et $s = 1$.

Lemme 2.5 : On suppose que $r_{i+1} - r_i = \Delta r$, $0 \leq i \leq l-1$. On a alors :

$$(2.21) \quad \prod_{i=1}^{l-1} \frac{(r_{i+1}(2+2\epsilon) + r_i(28-2\epsilon))}{((28-2\epsilon)r_{i+1} + (2+2\epsilon)r_i)} \cdot \left(\frac{r_{i+1}}{r_i} \right)^\gamma \leq \begin{cases} c, & \text{si } 0 \leq \gamma \leq \frac{13-2\epsilon}{15} \\ c \Delta r^{\gamma + \frac{(2\epsilon-13)}{15}}, & \text{si } \frac{13-2\epsilon}{15} < \gamma \end{cases}$$

où c est une constante ≥ 0 indépendante de Δr , et $\epsilon \geq \frac{1}{4}$.

La démonstration de ce lemme est la même que celle du lemme 2.2 (voir chapitre 1).

Lemme 2.6 : On suppose que $r_{i+1} - r_i = \Delta r$, $\mu_{j+1} - \mu_j = \Delta \mu = \frac{1}{J}$.

Soit $u_h \in V_h$ la solution des équations du schéma 11.2, pour $0 \leq j \leq J-1$.

On a les majorations :

$$\begin{aligned}
 (2.22) \quad & \max_{1 \leq i \leq I-1} \sum_{j=0}^{I-1} w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} r_i^\gamma u_{i,j+\frac{1}{2}}^2 \\
 & + \max_{1 \leq j \leq J-1} \sum_{i=0}^{I-1} \Delta r r_{i+\frac{1}{3}}^{\gamma-1} \gamma_j u_{i+\frac{1}{3},j}^2 \\
 & + \max_{1 \leq j \leq J-1} \sum_{i=0}^{I-1} \Delta r r_{i+\frac{2}{3}}^{\gamma-1} \gamma_j u_{i+\frac{2}{3},j}^2 + (\|u_h\|_{\gamma,0,h}^+)^2 \\
 & \leq c \Delta r^{\inf(0, \frac{5}{6}-\gamma)} \left\{ (\|S\|_{\gamma,0,h}^+)^2 + \sum_{i=0}^{I-1} \Delta r r_{i+\frac{1}{3}}^{\gamma-1} (u_{i+\frac{1}{3},0})^2 \right. \\
 & \left. + \sum_{i=0}^{I-1} \Delta r r_{i+\frac{2}{3}}^{\gamma-1} (u_{i+\frac{2}{3},0})^2 + \sum_{j=0}^{I-1} w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} \Delta r^\gamma (u_{0,j+\frac{1}{2}})^2 \right\}
 \end{aligned}$$

où C est une constante positive indépendante de Δr et $\Delta \mu$.

Démonstration : Considérons les relations (2.10) pour $0 \leq i \leq I-1$, $0 \leq j \leq J-1$. Ces relations peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 (2.23) \quad & \int_{K_{ij}} \left(\mu \left(2 \frac{\partial}{\partial r} (r u_h) + r u_h \right) + r \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u_h] \right. \\
 & \left. + r^2 (\sigma u_h - S) \right) \psi_h \, dr \, d\mu = 0, \quad \forall \psi_h \in P_1
 \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
 (2.24) \quad & \left[\left(w \mu \left(\mu \frac{\partial}{\partial r} (r u_h) + u_h \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u_h] \right. \right. \\
 & \left. \left. + r (\sigma u_h - S) \right) \psi_h \right]_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} = 0, \quad \forall \psi_h \in P_1.
 \end{aligned}$$

En raisonnant comme dans le lemme 2.4, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (2.25) \quad & w_{j+\frac{1}{2}}^{\mu} \mu_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{w_{i+\frac{1}{3}}}{r_{i+\frac{1}{3}}} \left(\frac{\partial}{\partial r} (ru_h) u_h \right) (r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}) \right) \\
 & + w_{j+\frac{1}{2}}^{\mu} \mu_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{w_{i+\frac{2}{3}}}{r_{i+\frac{2}{3}}} \left(\frac{\partial}{\partial r} (ru_h) u_h \right) (r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}) \right) \\
 & + \frac{w_{i+\frac{1}{3}}}{r_{i+\frac{1}{3}}} [\gamma_{j+1} u_{i+\frac{1}{3}, j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{1}{3}, j} + w_{j+\frac{1}{2}}^{\mu} \mu_{j+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}] u_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}} \\
 & + \frac{w_{i+\frac{2}{3}}}{r_{i+\frac{2}{3}}} [\gamma_{j+1} u_{i+\frac{2}{3}, j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{2}{3}, j} + w_{j+\frac{1}{2}}^{\mu} \mu_{j+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}}] u_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} \\
 & + [w w (\sigma u_h - S) u_h]_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} = 0.
 \end{aligned}$$

On commence par traiter le terme $(w \mu [\frac{w}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_h) u_h])_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{2}{3}}$ qui peut encore s'écrire :

$$w_{j+\frac{1}{2}}^{\mu} \mu_{j+\frac{1}{2}} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\frac{\partial}{\partial r} (ru_h) u_h \right) (r, \mu_{j+\frac{1}{2}}) dr,$$

soit encore :

$$w_{j+\frac{1}{2}}^{\mu} \mu_{j+\frac{1}{2}} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (ru_h^2) + \frac{1}{2} u_h^2 \right) (r, \mu_{j+\frac{1}{2}}) dr$$

ce qui donne de façon explicite la relation :

$$\begin{aligned}
 (2.26) \quad & w_{j+\frac{1}{2}}^{\mu} \mu_{j+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} r_{i+1} u_{i+1, j+\frac{1}{2}}^2 - \frac{1}{2} r_i u_{i, j+\frac{1}{2}}^2 + \frac{\Delta r}{15} u_{i, j+\frac{1}{2}}^2 + \frac{\Delta r}{15} u_{i+1, j+\frac{1}{2}}^2 \right. \\
 & \left. + \frac{4 \Delta r}{15} u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^2 - \frac{\Delta r}{30} u_{i, j+\frac{1}{2}} u_{i+1, j+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta r}{15} u_{i, j+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta r}{15} u_{i+1, j+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right\}
 \end{aligned}$$

En faisant un raisonnement identique à celui du lemme 2.7 du chapitre I, on montre que la relation (2.26) multipliée par 2 se minore par :

$$(2.27) \quad \omega_{j+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{\mu} \left\{ \frac{(28-2\epsilon)r_{i+1} + (2+2\epsilon)r_i}{30} u_{i+1,0}^2 - \frac{(2+2\epsilon)r_{i+1} + (28-2\epsilon)r_i}{30} u_{i,0}^2 + \frac{2(4-\frac{1}{\epsilon})\Delta r}{15} u_{i+\frac{1}{2},0}^2 \right\}_{j+\frac{1}{2}}.$$

On va traiter maintenant le deuxième terme de la relation (2.25) qui s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{i+\frac{1}{3}}}{r_{i+\frac{1}{3}}} [\gamma_{j+1} u_{i+\frac{1}{3},j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{1}{3},j} + \omega_{j+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{\mu} u_{i+\frac{1}{3},j+\frac{1}{2}}] u_{i+\frac{1}{3},j+\frac{1}{2}} + \\ & \frac{\omega_{i+\frac{2}{3}}}{r_{i+\frac{2}{3}}} [\gamma_{j+1} u_{i+\frac{2}{3},j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{2}{3},j} + \omega_{j+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{\mu} u_{i+\frac{2}{3},j+\frac{1}{2}}] u_{i+\frac{2}{3},j+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ce terme multiplié par 2 se minore grâce au lemme 2.3 par :

$$(2.28) \quad \begin{aligned} & \frac{\omega_{i+\frac{1}{3}}}{r_{i+\frac{1}{3}}} (\gamma_{j+1} u_{i+\frac{1}{3},j+1}^2 - \gamma_j u_{i+\frac{1}{3},j}^2) + \\ & \frac{\omega_{i+\frac{2}{3}}}{r_{i+\frac{2}{3}}} (\gamma_{j+1} u_{i+\frac{2}{3},j+1}^2 - \gamma_j u_{i+\frac{2}{3},j}^2). \end{aligned}$$

En multipliant la relation (2.25) par $r_{i+1}^{\gamma-1}$, et en utilisant (2.27) et (2.28), on obtient :

$$(2.29) \quad \begin{aligned} & \left\{ \omega_{\mu} \left(\frac{(28-2\epsilon)r_{i+1} + (2+2\epsilon)r_i}{r_{i+1}^{1-\gamma} \times 30 \times r_{i+1}^{\gamma}} r_{i+1}^{\gamma} (u_{i+1,0})^2 - \frac{(2+2\epsilon)r_{i+1} + (28-2\epsilon)r_i}{r_{i+1}^{1-\gamma} \times 30 \times r_i^{\gamma}} r_i^{\gamma} (u_{i,0})^2 + \frac{2(4-\frac{1}{\epsilon})\Delta r}{15 \times r_{i+1}^{1-\gamma}} (u_{i+\frac{1}{2},0}^2) \right) \right\}_{j+\frac{1}{2}} \\ & + [\Delta r r^{\gamma-1} (\gamma_{j+1} (u_{0,j+1})^2 - \gamma_j (u_{0,j})^2)]_{i+\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + [\Delta r r^{\gamma-1} (\gamma_{j+1} (u_{0,j+1})^2 - \gamma_j (u_{0,j})^2)]_{i+\frac{2}{3}} \\
 & + c \left(w_{j+\frac{1}{2}} \left(w_{i+\frac{1}{3}} r^{\gamma-1} u_{i+\frac{1}{3},j+\frac{1}{2}}^2 + w_{i+\frac{2}{3}} r^{\gamma-1} u_{i+\frac{2}{3},j+\frac{1}{2}}^2 \right) \right) \\
 & \leq C \left(w_{j+\frac{1}{2}} \left(w_{i+\frac{1}{3}} r^{\gamma-1} S_{i+\frac{1}{3},j+\frac{1}{2}}^2 + w_{i+\frac{2}{3}} r^{\gamma-1} S_{i+\frac{2}{3},j+\frac{1}{2}}^2 \right) \right).
 \end{aligned}$$

En sommant l'inégalité (2.29) sur les indices $0 \leq i \leq I-1$, $0 \leq j \leq J-1$, et en utilisant le lemme 2.5, on obtient la majoration (2.22).

Remarque 2.2 : Le schéma II.2 est stable pour la norme $\|\cdot\|_{\gamma,s,h}^+$, pour $\gamma \leq \frac{5}{6}$ et $s = 0$.

II.2.2 - Stabilité du schéma II.3 :

Lemme 2.7 : On suppose que $r_{i+1} - r_i = \Delta r$, $\mu_{j+1} - \mu_j = \Delta \mu = \frac{1}{J}$.

Soit $u_h \in V_h$ la solution des équations du schéma II.3, pour $-J \leq j \leq -1$.

On a les majorations :

$$\begin{aligned}
 (2.30) \quad & \max_{1 \leq i \leq I-1} \left\{ \sum_{j=-J}^{-1} \left(w |\mu| (1 - \mu^2)^{-s} \right)_{j+\frac{1}{2}} u_{i,j+\frac{1}{2}}^2 \right\} \\
 & + \sum_{j=-J}^{-1} \left(w |\mu| (1 - \mu^2)^{-s} \right)_{j+\frac{1}{2}} u_{0,j+\frac{1}{2}}^2 \\
 & + \max_{-J+1 \leq j \leq 0} \left\{ \sum_{i=0}^{I-1} \left(\frac{w}{r} \right)_{i+\frac{1}{3}} (1 - \mu_j^2)^{1-s} u_{i+\frac{1}{3},j}^2 \right\} \\
 & + \max_{-J+1 \leq j \leq 0} \left\{ \sum_{i=0}^{I-1} \left(\frac{w}{r} \right)_{i+\frac{2}{3}} (1 - \mu_j^2)^{1-s} u_{i+\frac{2}{3},j}^2 \right\} + (\|u_h\|_{0,s,h}^-)^2 \\
 & \leq c \{ (\Delta \mu)^{s-1} (\|S\|_{0,s,h}^-)^2 + \sum_{i=0}^{I-1} \left(\frac{w}{r} \right)_{i+\frac{1}{3}} u_{i+\frac{1}{3},-J}^2 \\
 & + \sum_{i=0}^{I-1} \left(\frac{w}{r} \right)_{i+\frac{2}{3}} u_{i+\frac{2}{3},-J}^2 \}
 \end{aligned}$$

où C est une constante positive indépendante de Δr et $\Delta \mu$.

Lemme 2.8 : On suppose que $r_{i+1} - r_i = \Delta r$, $\mu_{j+1} - \mu_j = \Delta \mu = \frac{1}{J}$.

Soit $u_h \in V_h$ la solution des équations du schéma II.3, pour $0 \leq j \leq J-1$.

On a les majorations :

$$\begin{aligned}
 (2.31) \quad & \max_{1 \leq i \leq I-1} \sum_{j+\frac{1}{2}}^{\omega} \mu_{j+\frac{1}{2}} u_{i,j+\frac{1}{2}}^2 \\
 & + \max_{1 \leq j \leq J-1} \sum_{i=0}^{I-1} \left(\frac{w}{r} \right)_{i+\frac{1}{3}} \gamma_j u_{i+\frac{1}{3},j}^2 \\
 & + \max_{1 \leq j \leq J-1} \sum_{i=0}^{I-1} \left(\frac{w}{r} \right)_{i+\frac{2}{3}} \gamma_j u_{i+\frac{2}{3},j}^2 + (\|u_h\|_{o,o,h}^+)^2 \\
 & \leq c \{ (\|S\|_{o,o,h}^+)^2 + \sum_{i=0}^{I-1} \left(\frac{w}{r} \right)_{i+\frac{1}{3}} (u_{i+\frac{1}{3},o})^2 \\
 & + \sum_{i=0}^{I-1} \left(\frac{w}{r} \right)_{i+\frac{2}{3}} (u_{i+\frac{2}{3},o})^2 + \sum_{j=0}^{J-1} (\omega \mu)_{j+\frac{1}{2}} (u_{o,j+\frac{1}{2}})^2 \}.
 \end{aligned}$$

Démonstrations des lemmes 2.7 et 2.8 :

Considérons les relations :

$$\begin{aligned}
 (2.32) \quad & \int_{K_{ij}} \left(\mu \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_h) + r \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u_h] + r^2 (\sigma u_h - S) \right) \psi_h \, dr \, d\mu = 0, \\
 & \forall \psi_h \in P_1.
 \end{aligned}$$

Dans ce cas bien particulier (schéma II.3), les relations (2.32) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 & \left[\omega w \left(\mu \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_h) + r \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u_h] + r^2 (\sigma u_h - S) \right) \psi_h \right]_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} = 0, \\
 & \forall \psi_h \in P_1.
 \end{aligned}$$

En choisissant ψ_h comme dans le lemme 2.4, on obtient :

$$(2.33) \quad \left[\mu \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_h) + r \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u_h] + r^2 (\sigma u_h - S) \right] \left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) = 0$$

$$(2.34) \quad \left[\mu \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_h) + r \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u_h] + r^2 (\sigma u_h - S) \right] \left(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) = 0.$$

On multiplie l'équation (2.33) par $w_{j+\frac{1}{2}} \frac{w_{i+\frac{1}{3}}}{\left(r_{i+\frac{1}{3}}\right)^2} u_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}$, et l'équation

$$(2.34) \text{ par } w_{j+\frac{1}{2}} \frac{w_{i+\frac{2}{3}}}{\left(r_{i+\frac{2}{3}}\right)^2} u_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}}, \text{ et on fait la somme ; il vient :}$$

$$(2.35) \quad w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{w}{r^2} u_h \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_h) \right)_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} + \left(w \frac{w}{r} u_h \frac{\partial}{\partial \mu} ((1 - \mu^2) u_h) \right)_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} + [w w (\sigma u_h - S) u_h]_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}}.$$

Dans l'expression (2.35) le terme en $\frac{\partial}{\partial r}$ s'écrit :

$$w u_h \frac{\partial u_h}{\partial r} \Big|_{i+\frac{1}{3}}^{i+\frac{2}{3}} + 2 \frac{w}{r} u_h^2 \Big|_{i+\frac{1}{3}}^{i+\frac{2}{3}} \quad \text{soit encore :}$$

$$\frac{1}{2} \left(u_{i+1, j+\frac{1}{2}}^2 - u_{i, j+\frac{1}{2}}^2 \right) + 2 \frac{w}{r} u_h^2 \Big|_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}}.$$

D'autre part on a les relations :

$$w_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) u_h \right)_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}} = \gamma_{j+1} u_{i+\frac{1}{3}, j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{1}{3}, j}$$

$$w_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) u_h \right)_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} = \gamma_{j+1} u_{i+\frac{2}{3}, j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{2}{3}, j}.$$

Finalement, la relation (2.35) devient :

$$\begin{aligned}
 (2.36) \quad & \frac{1}{2} w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} \left(u_{i+1, j+\frac{1}{2}}^2 - u_{i, j+\frac{1}{2}}^2 \right) \\
 & + \left(\frac{w}{r} \right)_{i+\frac{1}{3}} \left(\gamma_{j+1} u_{i+\frac{1}{3}, j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{1}{3}, j} \right. \\
 & \left. + 2 w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}} \right) u_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}} \\
 & + \left(\frac{w}{r} \right)_{i+\frac{2}{3}} \left(\gamma_{j+1} u_{i+\frac{2}{3}, j+1} - \gamma_j u_{i+\frac{2}{3}, j} \right. \\
 & \left. + 2 w_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} \right) u_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} \\
 & + [w w (\sigma u_h - S) u_h]_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Pour avoir la majoration (2.30), on multiplie la relation (2.36) par $\left(c_{j+\frac{1}{2}} \right)^{-s}$,

on utilise les lemmes 2.1, 2.2, l'inégalité (2.20), et on somme sur les indices i , $0 \leq i \leq I-1$, et j , $-J \leq j \leq -1$. La majoration (2.31) s'obtient, en multipliant la relation (2.36) par 2, en utilisant le lemme 2.3, et en sommant sur les indices i , $0 \leq i \leq I-1$, et j , $0 \leq j \leq J-1$.

Les normes discrètes qui interviennent dans les majorations (2.30) et (2.31) sont définies par :

$$\begin{aligned}
 (2.37) \quad \|v\|_{Y, s, h}^- &= \left(\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-J}^{-1} \left\{ w_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{3}}^\gamma \left(1 - \mu_{j+\frac{1}{2}}^2 \right)^{-s} v_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + w_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{2}{3}}^\gamma \left(1 - \mu_{j+\frac{1}{2}}^2 \right)^{-s} v_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.38) \quad \|v\|_{Y, s, h}^+ &= \left(\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{ w_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{3}}^\gamma \left(1 - \mu_{j+\frac{1}{2}}^2 \right)^{-s} v_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + w_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{2}{3}}^\gamma \left(1 - \mu_{j+\frac{1}{2}}^2 \right)^{-s} v_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}}^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$(2.39) \quad \|v\|_{Y,s,h} = \left((\|v\|_{Y,s,h}^+)^2 + (\|v\|_{Y,s,h}^-)^2 \right).$$

Les paramètres $w_{i+\frac{1}{3}}$, $w_{i+\frac{2}{3}}$, $r_{i+\frac{1}{3}}$, $r_{i+\frac{2}{3}}$, sont donnés par (1.27),

(1.28) et (1.29).

CHAPITRE III

=====

CONVERGENCE DES SCHEMAS

=====

ET RESULTATS NUMERIQUES

=====

Dans ce chapitre, on étudie la convergence des schémas numériques définis au chapitre II, pour différentes normes avec poids analogues discrets des normes :

$$\left(\int_0^R \int_{-1}^{+1} r^\gamma (1 - \mu^2)^{-s} u^2 dr d\mu \right)^{\frac{1}{2}},$$

pour $0 \leq \gamma \leq 2$,

$$0 \leq s \leq 1.$$

On fait ensuite une résolution numérique de ces schémas, et on donne quelques résultats des essais numériques.

Le plan du chapitre est le suivant :

1) Majorations d'erreur.

2) Résultats numériques.

III.1 - Majorations d'erreur

On montre quelques lemmes utiles pour la suite ; on donne ensuite des résultats de majorations d'erreur pour chaque type de schéma, dont les démonstrations utilisent les résultats de stabilité établis au chapitre précédent.

A tout entier $m \geq 0$, on associe :

$$|v|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\ell|=m} \int_{\Omega} |\partial^{\ell} v|^2 dr d\mu \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{\ell \leq m} |v|_{\ell,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où $\ell = (\ell_1, \ell_2)$, $\ell_i \geq 0$, $|\ell| = \ell_1 + \ell_2$, $\partial^{\ell} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{\ell_1} \left(\frac{\partial}{\partial \mu}\right)^{\ell_2}$.

Les applications $|\cdot|_{m,\Omega}$ et $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ définissent respectivement une semi-norme et une norme sur $H^m(\Omega)$. On définit aussi $|\cdot|_{m,\infty,\Omega}$, semi-norme sur $W^{m,\infty}(\Omega)$.

Définition 1.1 : Soit v une fonction continue sur $\bar{\Omega}$. Sa fonction V_h -interpolée est l'unique fonction $r_h v \in V_h$, telle que :

$$(1.1) \quad (r_h v)_{i,j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}} v(r_i, \mu_{j+1}) + (1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}}) v(r_i, \mu_j),$$

$$-J \leq j \leq J-1, \quad 0 \leq i \leq I$$

$$(1.2) \quad (r_h v)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}} v(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+1}) + (1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}}) v(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_j),$$

$$-J \leq j \leq J-1, \quad 0 \leq i \leq I-1.$$

Lemme 1.1 : Soit une fonction $v \in H^3(\Omega)$, on a :

$$(1.3) \quad |(v - r_h v)(r_i, \mu_j)| \leq C(\Delta r \Delta \mu)^{-\frac{1}{2}} (\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \|v\|_{3,2,K_{ij}},$$

$$-J \leq j \leq J, \quad 0 \leq i \leq I$$

$$(1.4) \quad |(v - r_h v)(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}})| \leq C(\Delta r \Delta \mu)^{-\frac{1}{2}} (\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \|v\|_{3,2,K_{ij}},$$

$$(1.5) \quad |(v - r_h v)(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}})| \leq C(\Delta r \Delta \mu)^{-\frac{1}{2}} (\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \|v\|_{3,2,K_{ij}},$$

$$-J \leq j \leq J-1, \quad 0 \leq i \leq I-1$$

où C est une constante positive indépendante de Δr et $\Delta \mu$.

Démonstration : Soit $\hat{K} = [-1, +1]^2$ le carré de référence, et $F_{ij} \in (P_1)^2$ la transformation qui envoie l'élément K_{ij} sur $\hat{K}$.

A la fonction v , on associe $\hat{v} = v \circ F_{ij}$.

De la définition de $\hat{r} \hat{v}$, on déduit que :

$$\begin{aligned} \hat{r} \hat{v}(\xi, \eta) &= \frac{(1+\eta)(1+\xi)}{4} \xi \hat{v}(+1, +1) + \frac{(1-\eta)(1+\xi)}{4} \xi \hat{v}(1, -1) \\ &+ \frac{-(1+\eta)(1-\xi)}{4} \xi \hat{v}(-1, +1) - \frac{(1-\eta)(1-\xi)}{4} \xi \hat{v}(-1, -1) \\ &+ \frac{(1+\eta)(1+\xi)(1-\xi)}{2} \hat{v}(0, +1) + \frac{(1-\eta)(1+\xi)(1-\xi)}{2} \hat{v}(0, -1). \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que :

$$\hat{v} - r_h \hat{v} \equiv 0 \quad \forall \hat{v} \in \{1, \xi, \eta, \xi\eta, \xi^2, \xi^2\eta\}.$$

L'application linéaire $\hat{v} \longrightarrow \hat{v} - \hat{r} \hat{v}$ est continue de $H^3(\hat{K})$ dans $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$|(\hat{v} - \hat{r} \hat{v})(\xi, \eta)| \leq \hat{C} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \eta^2} \right|_{L^2(\hat{K})} \quad \forall \hat{v} \in Q_2.$$

D'après le lemme de Bramble Hilbert approché [10], on a :

$$(1.6) \quad |\hat{v} - \hat{r} \hat{v}| \leq C \left((1 + \hat{c}) [\hat{v}]_{3,2,\hat{K}} + \hat{c} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \eta^2} \right|_{L^2(\hat{K})} \right) \quad \forall \hat{v} \in H^3(\hat{K}).$$

De plus, il est possible de montrer :

$$(1.7) \quad [\hat{v}]_{3,2,\hat{K}} \leq C(\Delta r \Delta \mu)^{-\frac{1}{2}} (\Delta r^3 + \Delta \mu^3) \|v\|_{3,2,K_{ij}}$$

$$(1.8) \quad \left| \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \pi^2} \right|_{L^2(\hat{K})} \leq (\Delta r \Delta \mu)^{-\frac{1}{2}} \Delta \mu^2 \left| \frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2} \right|_{L^2(K)}.$$

En combinant les relations (1.6), (1.7) et (1.8), on obtient le lemme 1.1.

Lemme 1.2 : Soit v une fonction de $H^4(\Omega)$, on a :

$$(1.9) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \mu} (v - r_h v) \left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) \right| \leq C (\Delta r \Delta \mu)^{-\frac{1}{2}} (\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \|v\|_{3,2,K_{ij}},$$

$$(1.10) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \mu} (v - r_h v) \left(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) \right| \leq C (\Delta r \Delta \mu)^{-\frac{1}{2}} (\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \|v\|_{3,2,K_{ij}},$$

$$(1.11) \quad \left| \frac{\partial}{\partial r} (v - r_h v) \begin{cases} \left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) \\ \left(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) \end{cases} \right| \leq \begin{cases} C (\Delta r \Delta \mu)^{-\frac{1}{2}} (\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \|v\|_{4,2,K_{ij}}, \\ \text{Schéma II.1 et Schéma II.3} \\ C (\Delta r \Delta \mu)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \left(\frac{\Delta r^3}{r_{i+1}} + \Delta \mu^2 \right) \|v\|_{3,2,K_{ij}} \right. \\ \left. + (\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \|v\|_{4,2,K_{ij}} \right\}, \\ \text{Schéma II.2} \end{cases}$$

Démonstration : Pour le schéma II.2, on a :

$$\left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) = F_{ij} \left(\epsilon_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right), \text{ avec}$$

$$(1.12) \quad \epsilon_{i+\frac{1}{3}} = \frac{(r_{i+1} + r_i)(r_{i+1} - r_i) - \sqrt{6} \sqrt{r_{i+1}^4 + r_i^4 + 10r_{i+1}^3 r_i + 10r_i^3 r_{i+1} + 28r_{i+1}^2 r_i^2}}{5(r_{i+1}^2 + r_i^2 + 4r_i r_{i+1})}$$

$$(1.13) \quad e_{j+\frac{1}{2}} = 2\alpha_{j+\frac{1}{2}} - 1.$$

Pour les schémas II.1 et II.3, on a :

$$\left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) = F_{ij} \left(\epsilon_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right), \text{ avec :}$$

$$(1.14) \quad \epsilon_{i+\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad e_{j+\frac{1}{2}} = 2\alpha_{j+\frac{1}{2}} - 1.$$

On va montrer l'inégalité (1.9); l'inégalité (1.10) se démontre de la même façon.

On a :

$$(1.15) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} (v - r_h v) \left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) = \frac{2}{\Delta \mu} \frac{\partial}{\partial \eta} (\hat{v} - \hat{r} \hat{v}) \left(\epsilon_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right)$$

$$(1.16) \quad |e_{j+\frac{1}{2}}| = |2\alpha_{j+\frac{1}{2}} - 1| \leq C \Delta \mu |\mu_j + \mu_{j+1}|.$$

L'application linéaire $\hat{v} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} (\hat{v} - \hat{r} \hat{v}) \left(\epsilon_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right)$ est continue de $H^3(\hat{K})$

dans $\mathbb{R}$, et on a, pour tout $\hat{v} \in Q_2$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \eta} (\hat{v} - \hat{r} \hat{v}) \left(\epsilon_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right) \right| \leq \hat{C} |e_{j+\frac{1}{2}}| \left| \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \eta^2} \right|_{0, \hat{K}}.$$

D'après le lemme de Bramble Hilbert approché [10] on a :

Pour tout $\hat{v} \in H^3(\hat{K})$,

$$(1.17) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \eta} (\hat{v} - \hat{r} \hat{v}) \left(\epsilon_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right) \right| \leq C \left(e_{j+\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \eta^2} \right|_{0, \hat{K}} + (1 + e_{j+\frac{1}{2}}) [\hat{v}]_{3,2, \hat{K}} \right).$$

En utilisant les relations (1.17), (1.7), (1.8), (1.16) et (1.15), on obtient l'inégalité (1.9).

Pour montrer l'inégalité (1.11), on procède de la façon suivante :

$$(1.18) \quad \frac{\partial}{\partial r} (v - r_h v) \left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) = \frac{2}{\Delta r} \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{v} - \hat{r} \hat{v}) \left(\epsilon_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right).$$

L'application linéaire $\hat{v} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{v} - \hat{r} \hat{v}) \left(\epsilon_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right)$ est continue de $H^4(\hat{K})$

dans $\mathbb{R}$, et on a, pour tout $\hat{v} \in P_3$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{v} - \hat{r} \hat{v}) \left(\epsilon_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right) \right| \leq \hat{C} \left| \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial \xi \partial \eta^2} \right|_{L^2(\hat{K})}, \text{ dans le cas où}$$

$e_{i+\frac{1}{3}}$ est défini par la relation (1.14) ; en effet, si $\hat{v} \in P_3 - \{\eta^2 \xi\}$, alors

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{v} - \hat{r} \hat{v}) \left(e_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right) = 0.$$

Si $\hat{v} = \eta^2 \xi$, alors $\hat{r} \hat{v} = \xi$ et $\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{v} - \hat{r} \hat{v}) \left(e_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right) = e_{j+\frac{1}{2}}^2 - 1$.

En appliquant le lemme de Bramble Hilbert approché [10], on a :

$$(1.19) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{v} - \hat{r} \hat{v}) \left(e_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right) \right| \leq C \left(\hat{C} \left| \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial \xi \partial \eta^2} \right|_{L^2(\hat{K})} + (1 + \hat{c}) |\hat{v}|_{4, \hat{K}} \right), \quad \forall \hat{v} \in H^4(\hat{K}).$$

Pour conclure, on revient sur l'élément K_{ij} et on utilise les relations (1.19), (1.18).

Dans le cas où $e_{i+\frac{1}{3}}$ est défini par la relation (1.12), l'application linéaire

$\hat{v} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{v} - \hat{r} \hat{v}) \left(e_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right)$ est continue de $H^4(\hat{K})$ dans $\mathbb{R}$, et on a, pour

tout $\hat{v} \in P_3$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{v} - \hat{r} \hat{v}) \left(e_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right) \right| \leq \hat{C} \left(\left(3e_{i+\frac{1}{3}}^2 - 1 \right) \left| \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial \xi^3} \right|_{L^2(\hat{K})} + \left| \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial \eta^2 \partial \xi} \right|_{L^2(\hat{K})} \right).$$

En effet, $\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{v} - \hat{r} \hat{v}) \left(e_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right) = 0 \quad \forall \hat{v} \in P_3 - \{\eta^2 \xi, \xi^3\}$.

Si $\hat{v} = \eta^2 \xi$, alors $\hat{r} \hat{v} = \xi$ et $\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{v} - \hat{r} \hat{v}) \left(e_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right) = e_{j+\frac{1}{2}}^2 - 1$.

Si $\hat{v} = \xi^3$, alors $\hat{r} \hat{v} = \xi$ et $\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{v} - \hat{r} \hat{v}) \left(e_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right) = 3e_{i+\frac{1}{3}}^2 - 1$.

En appliquant une autre fois le lemme de Bramble Hilbert approché [10], il vient :

$$(1.20) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{v} - \hat{r} \hat{v}) \left(e_{i+\frac{1}{3}}, e_{j+\frac{1}{2}} \right) \right| \leq C \left(\hat{C} \left(\left(3e_{i+\frac{1}{3}}^2 - 1 \right) \left| \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial \xi^3} \right|_{L^2(\hat{K})} + \left| \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial \eta^2 \partial \xi} \right|_{0, \hat{K}} \right) + \left(\hat{C} \left(3e_{i+\frac{1}{3}}^2 - 1 \right) + C' \right) |\hat{v}|_{4, 2, \hat{K}} \right).$$

D'autre part, on a :

$$(1.21) \quad \left| 3e^2_{i+\frac{1}{3}} - 1 \right| \leq C \frac{\Delta r}{r_{i+1}}.$$

Pour avoir la majoration (1.11), il suffit de revenir sur l'élément K_{ij} et d'utiliser les relations (1.20), (1.21), (1.18).

III.1.1 - Convergence du schéma numérique II.2 :

Lemme 1.3 : Soit $u \in H^4(\Omega) \cap W^{3,\infty}(\Omega)$ la solution du problème (0.1), (0.2).

On suppose que $r_{i+1} - r_i = \Delta r$, $0 \leq i \leq I-1$, $\mu_{j+1} - \mu_j = \Delta \mu = \frac{1}{J}$, $-J \leq j \leq J-1$, et que $c \leq \frac{\Delta r}{\Delta \mu} \leq C$.

On a alors :

$$(1.22) \quad \sum_{j=-J}^{J-1} \left(\omega |\mu| (1-\mu^2)^{-s} \right)_{j+\frac{1}{2}} \left((u - r_h u)(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}) \right)^2 \leq C \begin{cases} (\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 |u|_{3,\infty,\Omega}^2 & \text{si } 0 \leq s < 1 \\ (\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 |\text{Log } \Delta \mu| |u|_{3,\infty,\Omega}^2 & \text{si } s = 1 \end{cases}$$

pour $0 \leq i \leq I-1$

$$(1.23) \quad \sum_{i=0}^{I-1} \left(\Delta r r^{\gamma-1} \right)_{i+\frac{1}{3}} \left((u - r_h u)(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_j) \right)^2 \leq C (\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 |u|_{3,\infty,\Omega}^2,$$

pour $-J+1 \leq j \leq J$

$$(1.24) \quad \sum_{i=0}^{I-1} \left(\Delta r r^{\gamma-1} \right)_{i+\frac{2}{3}} \left((u - r_h u)(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_j) \right)^2 \leq C (\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 |u|_{3,\infty,\Omega}^2,$$

pour $-J+1 \leq j \leq J$

$$(1.25) \quad \|u - r_h u\|_{Y,s,h}^2 \leq C \begin{cases} (\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 |u|_{3,\infty,\Omega}^2 & \text{si } 0 \leq s < 1 \\ (\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 |\text{Log } \Delta \mu| |u|_{3,\infty,\Omega}^2 & \text{si } s = 1. \end{cases}$$

Démonstration : En utilisant le lemme 1.1, on a :

$$\left((u - r_h u)(r_i, \mu_{j+\frac{1}{2}}) \right)^2 \leq C (\Delta r \Delta \mu)^{-1} (\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 \|u\|_{3,2,K_{ij}}^2,$$

$$0 \leq i \leq I-1, \quad -J \leq j \leq J-1.$$

En majorant $\|u\|_{3,2,K_{ij}}^2$ par $(\Delta r \Delta \mu) |u|_{3,\infty,K_{ij}}^2$, on a :

$$\left((u - r_h u)(r_i, \mu_{j+\frac{1}{2}}) \right)^2 \leq C (\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 |u|_{3,\infty,K_{ij}}^2.$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-J}^{J-1} (\omega |\mu| (1-\mu^2)^{-s})_{j+\frac{1}{2}} \left((u - r_h u)(r_i, \mu_{j+\frac{1}{2}}) \right)^2 \\ & \leq C (\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 |u|_{3,\infty,\Omega}^2 \sum_{j=-J}^{J-1} (\omega |\mu| (1-\mu^2)^{-s})_{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On en déduit la majoration (1.22). En raisonnant de la même façon, on obtient les inégalités (1.23), (1.24) et (1.25).

Remarque 1.1 : Lorsqu'on considère les schémas II.1, II.3, les résultats du lemme 1.3 sont toujours valables.

On va donner maintenant un théorème de majorations d'erreur, pour le schéma numérique II.2.

Théorème 1.1 : Soit $u \in H^4(\Omega) \cap W^{3,\infty}(\Omega)$ la solution du problème (0.1),

(0.2). On suppose que $r_{i+1} - r_i = \Delta r$, $0 \leq i \leq I-1$, $\mu_{j+1} - \mu_j = \Delta \mu = \frac{1}{J}$,

$-J \leq j \leq J-1$, et que $c \leq \frac{\Delta r}{\Delta \mu} \leq C$. On a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} (1.26) \quad & \max_{1 \leq i \leq I-1} \left\{ \sum_{j=-J}^{-1} (\omega |\mu| (1-\mu^2)^{-s})_{j+\frac{1}{2}} r_i^\gamma (u_{i,j+\frac{1}{2}} - u(r_i, \mu_{j+\frac{1}{2}}))^2 \right\} + \\ & \max_{-J+1 \leq j \leq 0} \left\{ \sum_{i=0}^{I-1} (\Delta r r^{\gamma-1})_{i+\frac{1}{3}} (1-\mu_j^2)^{1-s} (u_{i+\frac{1}{3},j} - u(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_j))^2 \right\} + \\ & \max_{-J+1 \leq j \leq 0} \left\{ \sum_{i=0}^{I-1} (\Delta r r^{\gamma-1})_{i+\frac{2}{3}} (1-\mu_j^2)^{1-s} (u_{i+\frac{2}{3},j} - u(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_j))^2 \right\} + \\ & \sum_{j=-J}^{-1} (\omega |\mu| (1-\mu^2)^{-s})_{j+\frac{1}{2}} \Delta r^\gamma (u_{o,j+\frac{1}{2}} - u(o, \mu_{j+\frac{1}{2}}))^2 + (\|u - u_h\|_{\gamma,s,h})^2 \\ & \leq C E(\gamma, s, h) (|u|_{3,\infty,\Omega}^2 + \|u\|_{4,2,\Omega}^2), \end{aligned}$$

où les valeurs de $E(\gamma, s, h)$ sont données dans le tableau 1.1 et où C est une constante positive indépendante de Δr et $\Delta \mu$.

Tableau 1.1

Valeurs de $E(\gamma, s, h)$ - Schéma II.2

	$0 \leq s < 1$	$s = 1$
$0 \leq \gamma < \frac{5}{6}$	$(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 \cdot \Delta r^{2\gamma - \frac{11}{6}} \cdot \Delta \mu^{s-1}$	$(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 \cdot \Delta r^{2\gamma - \frac{11}{6}} \text{Log } \Delta \mu $
$\frac{5}{6} \leq \gamma < 1$	$(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 \cdot \Delta r^{\gamma-1} \cdot \Delta \mu^{s-1}$	$(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 \cdot \Delta r^{\gamma-1} \cdot \text{Log } \Delta \mu $
$\gamma = 1$	$(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 \cdot \text{Log } \Delta r \cdot \Delta \mu^{s-1}$	$(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 \cdot \text{Log } \Delta r \cdot \text{Log } \Delta \mu $
$1 < \gamma \leq 2$	$(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 \cdot \Delta \mu^{s-1}$	$(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 \cdot \text{Log } \Delta \mu $

Démonstration : Considérons les équations (1.12) (voir chapitre II), qu'on écrit sous la forme :

$$(1.27) \quad [w\omega(\mu r \frac{\partial u_h}{\partial r} + (1-\mu^2) \frac{\partial u_h}{\partial \mu} + r(\sigma u_h - S))\psi_h]_{r_{i+\frac{1}{3},j+\frac{1}{2}}^{\mu}}^{r_{i+\frac{2}{3},j+\frac{1}{2}}^{\mu}} = 0.$$

Soit $r_h u$ l'interpolée de u , la fonction $u_h - r_h u$ vérifie l'équation (1.27) avec au lieu de S , un autre terme S' défini de la manière suivante :

$$S' = \left(\mu \frac{\partial}{\partial r} (u - r_h u) + \frac{(1-\mu^2)}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} (u - r_h u) + \sigma (u - r_h u) \right) (r, \mu).$$

On va majorer le terme S' .

En utilisant les lemmes 1.1 et 1.2, on a :

$$|S'_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}| \leq C(\Delta r \Delta \mu)^{-\frac{1}{2}} (\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \{ r_{i+1}^{-1} (1 + (1 - \mu^2_{j+\frac{1}{2}})) \|u\|_{3,2,K_{ij}} + \|u\|_{4,2,K_{ij}} \}$$

et on a la même majoration pour le terme $|S'_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}}|$.

En majorant $w_{j+\frac{1}{2}}$ par $c\Delta\mu$, $w_{i+\frac{1}{3}}$ par $cr_{i+1}\Delta r$, $w_{i+\frac{2}{3}}$ par $cr_{i+1}\Delta r$,

et $\|u\|_{3,2,K_{ij}}^2$ par $(\Delta r \Delta \mu) |u|_{3,\infty,K_{ij}}^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} (\|S'\|_{\gamma,s,h}^-)^2 &\leq C(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 \|u\|_{4,2,\Omega}^2 \\ &+ C'(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 |u|_{3,\infty,\Omega}^2 \left\{ \left(\sum_{i=1}^I r_i^{\gamma-2} \Delta r \right) \left(\sum_{j=-J}^{-1} (1 - \mu^2_{j+\frac{1}{2}})^{-s} \Delta \mu \right) \right. \\ &\left. + \left(\sum_{i=1}^I r_i^{\gamma-2} \Delta r \right) \left(\sum_{j=-J}^{-1} (1 - \mu^2_{j+\frac{1}{2}})^{2-s} \Delta \mu \right) \right\}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(1.28) \quad (\|S'\|_{\gamma,s,h}^-)^2 \leq C(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 (F(\gamma, s, h) |u|_{3,\infty,\Omega}^2 + \|u\|_{4,2,\Omega}^2)$$

où $F(\gamma, s, h)$ est donné par le tableau 1.2.

Tableau 1,2

Valeurs de $F(\gamma, s, h)$ - Schéma II.2

	$0 \leq \gamma < \frac{5}{6}$	$\frac{5}{6} \leq \gamma < 1$	$\gamma = 1$	$1 < \gamma \leq 2$
$0 \leq s < 1$	$\Delta r^{\gamma-1}$	$\Delta r^{\gamma-1}$	$ \text{Log } \Delta r $	c
$s = 1$	$\Delta r^{\gamma-1} \text{Log } \Delta \mu $	$\Delta r^{\gamma-1} \text{Log } \Delta \mu $	$ \text{Log } \Delta r \text{Log } \Delta \mu $	$ \text{Log } \Delta \mu $

Pour avoir la majoration (1.26), on utilise les résultats de stabilité des lemmes 2.4 (chapitre II) et 2.7 (chapitre I), l'inégalité (1.28) et le lemme 1.3.

Corollaire 1.1 : On a les majorations d'erreur suivantes :

$$(1.29) \quad \|u - u_h\|_{2,1,h}^- \leq C(\Delta r^3 + \Delta \mu^2) |\text{Log } \Delta \mu|^{\frac{1}{2}} (|u|_{3,\infty,\Omega} + \|u\|_{4,2,\Omega})$$

$$(1.30) \quad \|u - u_h\|_{\frac{5}{6},1,h}^- \leq C(\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \Delta r^{-\frac{1}{12}} |\text{Log } \Delta \mu|^{\frac{1}{2}} (|u|_{3,\infty,\Omega} + \|u\|_{4,2,\Omega})$$

$$(1.31) \quad \|u - u_h\|_{0,1,h}^- \leq C(\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \cdot \Delta r^{-\frac{11}{12}} |\text{Log } \Delta \mu|^{\frac{1}{2}} (|u|_{3,\infty,\Omega} + \|u\|_{4,2,\Omega})$$

On va énoncer un second théorème de majorations d'erreur qui se démontre de la même façon que le théorème 1.1.

Théorème 1.2 : Soit $u \in H^4(\Omega) \cap W^{3,\infty}(\Omega)$ la solution du problème (0.1), (0.2).

On suppose que $r_{i+1} - r_i = \Delta r$, $0 \leq i \leq I-1$, $\mu_{j+1} - \mu_j = \Delta \mu = \frac{1}{J}$,

$-J \leq j \leq J-1$ et que $C \leq \frac{\Delta r}{\Delta \mu} \leq C$. On a alors :

$$(1.32) \quad \begin{aligned} & \max_{1 \leq i \leq I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \omega_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} r_i^\gamma \left(u_{i,j+\frac{1}{2}} - u(r_i, \mu_{j+\frac{1}{2}}) \right)^2 + \\ & \max_{1 \leq j \leq J-1} \sum_{i=0}^{I-1} (\Delta r r^{\gamma-1})_{i+\frac{1}{3}} \gamma_j \left(u_{i+\frac{1}{3},j} - u(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_j) \right)^2 + \\ & \max_{1 \leq j \leq J-1} \sum_{i=0}^{I-1} (\Delta r r^{\gamma-1})_{i+\frac{2}{3}} \gamma_j \left(u_{i+\frac{2}{3},j} - u(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_j) \right)^2 + \\ & (\|u - u_h\|_{\gamma,0,h}^+)^2 \leq C G(\gamma, 0, h) (|u|_{3,\infty,\Omega}^2 + \|u\|_{4,2,\Omega}^2) \end{aligned}$$

où les valeurs de $G(\gamma, 0, h)$ sont données dans le tableau 1.3 et où C est une constante positive indépendante de Δr et $\Delta \mu$.

Tableau 1.3

Valeurs de $G(\gamma, o, h)$

$0 \leq \gamma < \frac{5}{6}$	$(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 \cdot \Delta r^{2\gamma - \frac{11}{6}} \cdot \text{Log } \Delta \mu $
$\gamma = \frac{5}{6}$	$(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 \cdot \Delta r^{-\frac{1}{6}} \cdot \text{Log } \Delta \mu $
$\frac{5}{6} < \gamma < 1$	$(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 \cdot \Delta r^{-\frac{1}{6}} \cdot \text{Log } \Delta \mu $
$\gamma = 1$	$(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 \cdot \text{Log } \Delta r \cdot \text{Log } \Delta \mu \cdot \Delta r^{-\frac{1}{6}}$
$1 < \gamma \leq 2$	$(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 \cdot \Delta r^{\frac{5}{6} - \gamma} \cdot \text{Log } \Delta \mu $

Corollaire 1.2 : Sous les hypothèses du théorème 1.2, on a les majorations d'erreur

$$(1.33) \quad \|u - u_h\|_{\frac{5}{6}, o, h}^+ \leq C(\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \cdot \Delta r^{-\frac{1}{12}} \cdot |\text{Log } \Delta \mu|^{\frac{1}{2}} (|u|_{3, \infty, \Omega} + \|u\|_{4, 2, \Omega})$$

$$(1.34) \quad \|u - u_h\|_{2, o, h}^+ \leq C(\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \cdot \Delta r^{-\frac{7}{12}} \cdot |\text{Log } \Delta \mu|^{\frac{1}{2}} (|u|_{3, \infty, \Omega} + \|u\|_{4, 2, \Omega})$$

$$(1.35) \quad \|u - u_h\|_{o, o, h}^+ \leq C(\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \cdot \Delta r^{-\frac{11}{12}} \cdot |\text{Log } \Delta \mu|^{\frac{1}{2}} (|u|_{3, \infty, \Omega} + \|u\|_{4, 2, \Omega}).$$

En combinant les résultats des théorèmes 1.1 et 1.2 et des corollaires 1.1 et 1.2, on obtient les résultats de majorations d'erreur pour le schéma II.2.

Théorème 1.3 : Sous les hypothèses du théorème 1.2, si $u \in H^4(\Omega) \cap W^{3, \infty}(\Omega)$ est la solution du problème (0.1), (0.2), on a :

$$(1.36) \quad \|u - u_h\|_{\frac{5}{6}, 0, h} \leq C(\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \cdot \Delta r^{-\frac{1}{12}} \cdot |\text{Log } \Delta \mu|^{\frac{1}{2}} (|u|_{3, \infty, \Omega} + \|u\|_{4, 2, \Omega})$$

$$(1.37) \quad \|u - u_h\|_{2, 0, h} \leq C(\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \cdot \Delta r^{-\frac{7}{12}} \cdot |\text{Log } \Delta \mu|^{\frac{1}{2}} (|u|_{3, \infty, \Omega} + \|u\|_{4, 2, \Omega})$$

$$(1.38) \quad \|u - u_h\|_{0, 0, h} \leq C(\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \cdot \Delta r^{-\frac{11}{12}} \cdot |\text{Log } \Delta \mu|^{\frac{1}{2}} (|u|_{3, \infty, \Omega} + \|u\|_{4, 2, \Omega})$$

III. 1.2 - Convergence du schéma numérique II.3 :

Théorème 1.4 : Soient $u \in H^4(\Omega) \cap W^{3, \infty}(\Omega)$ la solution du problème (0.1), (0.2) et $u_h \in V_h$ la solution du schéma II.3. On suppose que $(r_{i+1} - r_i) = \Delta r$, $0 \leq i \leq I-1$, $\mu_{j+1} - \mu_j = \Delta \mu = \frac{1}{J}$, $-J \leq j \leq J-1$. On a alors :

$$(1.39) \quad \|u - u_h\|_{0, 0, h} \leq C(\Delta r^3 + \Delta \mu^2) |\text{Log } \Delta \mu|^{\frac{1}{2}} [|u|_{4, \infty, \Omega} + \Delta r^{-\frac{1}{2}} |u|_{3, \infty, \Omega}]$$

où C est une constante positive indépendante de Δr et $\Delta \mu$.

Démonstration : L'étude de la précision du schéma II.3 est moins compliquée que celle du schéma II.2, mais la façon de procéder est la même pour les deux schémas.

Pour ce schéma numérique, les normes discrètes qu'on considère sont données par (2.37), (2.38) et (2.39), (voir paragraphe 2 du chapitre II).

Comme pour le schéma II.2, on commence par majorer le terme S' défini par :

$$S' = \left(\mu \frac{\partial}{\partial r} (u - r_h u) + \frac{(1 - \mu^2)}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} (u - r_h u) + \sigma(u - r_h u) \right) (r, \mu).$$

En appliquant les lemmes 1.1 et 1.2, on a :

$$|S'_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}| \leq C(\Delta r \Delta \mu)^{\frac{1}{2}} \cdot (\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \left\{ \|u\|_{4, 2, K_{ij}} + \left(1 + \frac{1}{r_{i+\frac{1}{3}}}\right) \|u\|_{3, 2, K_{ij}} \right\}.$$

En majorant $\|u\|_{3, 2, K_{ij}}$ par $(\Delta r \Delta \mu)^{\frac{1}{2}} |u|_{3, \infty, K_{ij}}$, on obtient :

$$(1.40) \quad |S'_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}}| \leq C(\Delta r \Delta \mu)^{-\frac{1}{2}} (\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \left\{ \|u\|_{4, 2, K_{ij}} + \left(1 + \frac{1}{r_{i+\frac{1}{3}}}\right) (\Delta r \Delta \mu)^{\frac{1}{2}} |u|_{3, \infty, K_{ij}} \right\}$$

$$\begin{aligned} \|S'\|_{o,s,h}^2 = & \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-J}^{J-1} \left\{ w_{i+\frac{1}{3}} w_{j+\frac{1}{2}} \left(1 - \mu_{j+\frac{1}{2}}^2\right)^{-s} S_{i+\frac{1}{3},j+\frac{1}{2}}'^2 \right. \\ & \left. + w_{i+\frac{2}{3}} w_{j+\frac{1}{2}} \left(1 - \mu_{j+\frac{1}{2}}^2\right)^{-s} S_{i+\frac{2}{3},j+\frac{1}{2}}'^2 \right\}. \end{aligned}$$

En majorant $w_{j+\frac{1}{2}}$ par $c \Delta \mu$, $w_{i+\frac{1}{3}}$ par $c \Delta r$, $w_{i+\frac{2}{3}}$ par $c \Delta r$ et en utilisant l'inégalité (1.40), il vient :

$$\|S'\|_{o,o,h}^+ \leq C(\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \|u\|_{4,2,\Omega} + C'(\Delta r^3 + \Delta \mu^2) \left(\frac{1}{\Delta r}\right)^{\frac{1}{2}} |u|_{3,\infty,\Omega}.$$

On en déduit que :

$$(1.41) \quad \|S'\|_{o,o,h}^+ \leq C(\Delta r^3 + \Delta \mu^2) [\Delta r^{-\frac{1}{2}} |u|_{3,\infty,\Omega} + \|u\|_{4,2,\Omega}].$$

De plus en majorant $\|u\|_{4,2,K_{ij}}$ par $(\Delta r \Delta \mu)^{\frac{1}{2}} |u|_{4,\infty,K_{ij}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} (\|S'\|_{o,1,h}^-)^2 \leq & C(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 |u|_{4,\infty,\Omega}^2 \left(\sum_{j=-J}^{-1} \left(1 - \mu_{j+\frac{1}{2}}^2\right)^{-1} \Delta \mu \right) \\ & + C'(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 |u|_{3,\infty,\Omega}^2 \left(\sum_{j=-J}^{-1} \left(1 - \mu_{j+\frac{1}{2}}^2\right)^{-1} \Delta \mu \right) \cdot \Delta r^{-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(1.42) \quad (\|S'\|_{o,1,h}^-)^2 \leq C(\Delta r^3 + \Delta \mu^2)^2 |\text{Log } \Delta \mu| (|u|_{4,\infty,\Omega}^2 + \Delta r^{-1} |u|_{3,\infty,\Omega}^2).$$

L'inégalité (1.39) se déduit des lemmes 2.7 et 2.8 (chapitre II), du lemme 1.3 (chapitre III), et des inégalités (1.41) et (1.42).

Remarque 1.2 : La majoration (1.39) est une évaluation de l'erreur pour une norme discrète sans poids.

III.2 - Résultats numériques

Dans ce paragraphe, on résout numériquement le problème (0.1), (0.2) en utilisant les schémas II.1, II.2 et II.3, pour différents seconds membres et différentes valeurs de Δr et $\Delta \mu$.

Les essais numériques ont été effectués sur IRIS 50 (ordinateur du Centre de Calcul de l'Université de Besançon).

Pour tous ces essais numériques, on donne les valeurs des erreurs quadratiques moyennes définies par :

$$EQM = \left(\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-J}^{J-1} w_{i+\frac{1}{3}} w_{j+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{3}}^{\gamma} \left(u_{i+\frac{1}{3}, j+\frac{1}{2}} - u_h \left(r_{i+\frac{1}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) \right)^2 + w_{i+\frac{2}{3}} w_{j+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{2}{3}}^{\gamma} \left(u_{i+\frac{2}{3}, j+\frac{1}{2}} - u_h \left(r_{i+\frac{2}{3}}, \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On considère l'équation :

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) + r \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) u] + \sigma r^2 u = r^2 S,$$

$$\text{pour } (r, \mu) \in \Omega =]0, R[\times]-1, +1[$$

$$u(R, \mu) = u_R(\mu) \quad \text{pour } \mu < 0.$$

On pose $\Delta r = \frac{R}{I}$, $\Delta \mu = \frac{1}{J}$, avec $M = 2J$ le nombre de directions angulaires.

On a testé numériquement les schémas II.2 et II.3 pour :

- 1) $\sigma = 1, \quad R = 3, \quad S = \frac{4}{3} \exp \left(r \frac{\mu}{3} \right), \quad u_R = \exp(\mu),$
 $u(r, \mu) = \exp \left(r \frac{\mu}{3} \right)$
- 2) $\sigma = 1, \quad R = 4, \quad S = 1, \quad u_R = 0,$
 $u(r, \mu) = 1 - \exp \left(-r \mu - \sqrt{R^2 - r^2(1 - \mu^2)} \right)$
- 3) $\sigma = 1, \quad R = 3, \quad S = \sin \frac{\pi r}{3} + \mu \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi r}{3}, \quad u_R = 0, \quad u(r, \mu) = \sin \frac{\pi r}{3}.$

Les valeurs numériques des EQM sont données par les tableaux suivants :

Tableau n°1

schéma II.2		$\gamma = 0$	$\gamma = \frac{5}{6}$	$\gamma = 1$	$\gamma = 2$
premier exemple	$l = 15$ $M = 8$	$0.28280583 \times 10^{-2}$	$0.42340181 \times 10^{-2}$	$0.45960132 \times 10^{-2}$	$0.75638973 \times 10^{-2}$
	$l = 30$ $M = 8$	$0.28280534 \times 10^{-2}$	$0.42341441 \times 10^{-2}$	$0.45961813 \times 10^{-2}$	$0.75645253 \times 10^{-2}$
	$l = 60$ $M = 8$	$0.28280528 \times 10^{-2}$	$0.42341618 \times 10^{-2}$	$0.45962037 \times 10^{-2}$	$0.75645973 \times 10^{-2}$
deuxième exemple	$l = 20$ $M = 4$	$0.28158226 \times 10^{-1}$	$0.49652079 \times 10^{-1}$	$0.55620290 \times 10^{-1}$	0.10994603
	$l = 40$ $M = 4$	$0.28035703 \times 10^{-1}$	$0.49443908 \times 10^{-1}$	$0.55388960 \times 10^{-1}$	0.10951214
	$l = 80$ $M = 4$	$0.28028267 \times 10^{-1}$	$0.49431111 \times 10^{-1}$	$0.55374703 \times 10^{-1}$	0.10948498

Tableau n°2

schéma II.2		$\gamma = 0$	$\gamma = \frac{5}{6}$	$\gamma = 1$	$\gamma = 2$
premier exemple	$l = 15$ $M = 8$	$0.28280583 \times 10^{-2}$	$0.42340181 \times 10^{-2}$	$0.45960132 \times 10^{-2}$	$0.75638973 \times 10^{-2}$
	$l = 15$ $M = 16$	$0.71053004 \times 10^{-3}$	$0.10648432 \times 10^{-2}$	$0.11560524 \times 10^{-2}$	$0.19035345 \times 10^{-2}$
	$l = 15$ $M = 32$	$0.17778022 \times 10^{-3}$	$0.26661510 \times 10^{-3}$	$0.28948011 \times 10^{-3}$	$0.47681465 \times 10^{-3}$
deuxième exemple	$l = 40$ $M = 4$	$0.28035703 \times 10^{-1}$	$0.49443908 \times 10^{-1}$	$0.55388960 \times 10^{-1}$	0.10951214
	$l = 40$ $M = 8$	$0.98466184 \times 10^{-2}$	$0.17434195 \times 10^{-1}$	$0.19545343 \times 10^{-1}$	$0.38814746 \times 10^{-1}$
	$l = 40$ $M = 16$	$0.36232693 \times 10^{-2}$	$0.64108985 \times 10^{-2}$	$0.71860693 \times 10^{-2}$	$0.14255346 \times 10^{-1}$

On supposera que l'erreur quadratique moyenne EQM peut se mettre sous la forme :

$$E = c (\Delta r)^p + c' (\Delta \mu)^q.$$

Des résultats du tableau n°1, on déduit que $p = 3$, et de ceux du tableau n°2, on déduit que $q = 2$, et ceci pour toutes les valeurs de γ . Ce qui correspond à peu près aux résultats du théorème 1.3 pour $\gamma = \frac{5}{6}$. Pour $\gamma \neq \frac{5}{6}$, l'estimation donnée par le théorème 1.3 est un peu pessimiste.

Tableau n°3

schéma II.3		$\gamma = 0$
troisième exemple	$I = 15$ $M = 8$	0.1488
	$I = 30$ $M = 8$	0.1464
	$I = 60$ $M = 8$	0.1460
deuxième exemple	$I = 20$ $M = 8$	0.1844
	$I = 40$ $M = 8$	0.1785
	$I = 80$ $M = 8$	0.1770

Tableau n°4

schéma II.3		$\gamma = 0$
troisième exemple	$I = 60$ $M = 32$	0.10319
	$I = 60$ $M = 64$	0.8638×10^{-1}
	$I = 60$ $M = 128$	0.7230×10^{-1}
deuxième exemple	$I = 20$ $M = 8$	0.1844
	$I = 20$ $M = 16$	0.1546
	$I = 20$ $M = 32$	0.1230

Les résultats du tableau n°3 semblent indiquer que l'erreur quadratique moyenne EQM est en $O(\Delta r^p)$, avec $2 \leq p < 3$, ce qui correspond à peu près aux résultats du Théorème 1.4.

L'estimation donnée au théorème 1.4 est un peu optimiste par rapport à celle qu'on obtient à partir des résultats du tableau n°4.

On définit des erreurs pour $r = 0$, par :

$$E01 = \left(\sum_{j=-J}^{J-1} w_{j+\frac{1}{2}} \frac{(u_{o,j+\frac{1}{2}} - u_{o,j-\frac{1}{2}})^2}{(\mu_{j+\frac{1}{2}} - \mu_{j-\frac{1}{2}})^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E02 = \left(\sum_{j=-J}^0 w_{j+\frac{1}{2}} (u_{o,j+\frac{1}{2}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans les tableaux n°5 et n°6, on donne pour chaque type de schéma les valeurs numériques de E01 et E02.

Tableau n°5

schéma II,2		E01	E02
premier exemple $u_{ex}(0, \mu) = 1$	$l = 30$ $M = 8$	$0.78421235 \times 10^{-5}$	0.9952 6434
	$l = 60$ $M = 8$	$0.24683211 \times 10^{-5}$	0.9952 67 62
	$l = 120$ $M = 8$	$0.66141783 \times 10^{-6}$	0.9952 6857
deuxième exemple $u_{ex}(0, \mu) =$ 0.981 68	$l = 20$ $M = 8$	$0.14415153 \times 10^{-4}$	0.97704223
	$l = 40$ $M = 8$	$0.23996050 \times 10^{-5}$	0.97704067
	$l = 80$ $M = 8$	$0.47217391 \times 10^{-6}$	0.97704019

On constate que pour le schéma II,2, E01 est en $O(\Delta r^2)$ et que E02 est une constante qui tend vers la valeur du flux exact à l'origine ($r = 0$) quand le maillage en r devient de plus en plus fin.

Tableau n°6

schéma II,3		E 01	E 02
premier exemple $u_{ex}(0, \mu) = 1$	$l = 60$ $M = 8$	$0,50057623 \times 10^{-1}$	1,0424
	$l = 120$ $M = 8$	$0,26144715 \times 10^{-1}$	1,0553
	$l = 240$ $M = 8$	$0,13375036 \times 10^{-1}$	1,0623
deuxième exemple $u_{ex}(0, \mu) =$ 0,98168	$l = 40$ $M = 8$	$0,96610366 \times 10^{-1}$	0,9250
	$l = 80$ $M = 8$	$0,49066814 \times 10^{-1}$	0,9489
	$l = 160$ $M = 8$	$0,24745368 \times 10^{-1}$	0,9618

Le tableau ci-dessus nous permet de constater que pour le schéma II,3, l'erreur E01 est en $O(\Delta r)$, et l'erreur E02 converge vers une constante très voisine de la valeur du flux exact à l'origine (pour $r = 0$). En comparant les résultats numériques des schémas II,2 et II,3, on remarque que c'est le schéma II,2 qui est le plus satisfaisant.

BIBLIOGRAPHIE

=====

- [1] BELL G.I., GLASSTONE S. :
Nuclear Reactor Theory.
Von Nostrand Reinold Company, 1970.
- [2] CIARLET P.G. :
Cours Séminaire de Mathématiques Supérieures.
Juin-Juillet 1975, Université de Montréal.
- [3] CIARLET P.G., RAVIART P.A. :
Général Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications
to finite elements methods.
Arch. Rational Mech. Anal. 46 (1972), 177-199.
- [4] FREIDRICHS K.O. :
Symmetric positive differential equations.
Comm. on pure and appli. Math. II (1958), 333-418.
- [5] LATHROP K.D. :
Spatial differencing of the transport equation.
Positivity vs. accuracy. Journ. of Comp. Physics 4, 475-498 (1969).
- [6] LATHROP K.D., CARLSON B.G. :
Numerical Solution of the Boltzmann transport equation.
Journ. of Comp. Physics 2, 173-197 (1967).
- [7] LATHROP K.D., CARLSON B.G. :
Transport theory. The method of discrete ordinates. Computing
methods in reactor physics.
(Greenspan H., Kelerb C.N., Okrent D., editors), 165-266,
Gordon and Breach, 1968.

- [8] LESAIN P. :
Finite element methods for the transport equation.
R.A.I.R.O. Série Mathématiques R - 2, 67-94 (Août 1974).
- [9] LESAIN P. :
Continuous and discontinuous finite element methods for solving the transport equation.
Paper presented at the Conference on the Mathematics of Finite Elements and Applications, Brunel University, 7-10 (April 1975).
- [10] LESAIN P. :
Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis.
Thèse, Paris, 1975.
- [11] MILLER Jr W.F. :
New developments in differencing the spherical geometry neutron transport equation.
Méthodes numériques pour les sciences de l'ingénieur, (1981), 83-95.
- [12] RABINOWITZ D. :
Method of numerical integration.
Academic Press (1975).
- [13] REED W.H., LATHROP K.D. :
Truncation error analysis of finite difference approximation to the transport equation.
Nucl. Sci. and Eng., 41, 237-248 (1970).

